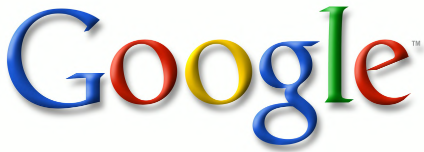



NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06633364 6





Leitfaden und Aufgabensammlung

zur

Mechanik.

Für technische Fachschulen

und den Selbstunterricht

bearbeitet

von

R. Geigenmüller,

Oberlehrer am Technikum Mittweida.

I. TEIL.

Elementarmechanik.

Vierte Auflage.

Mittweida.

Polytechnische Buchhandlung R. Schulze.

1900.

Elementarmechanik.

Vorwort zur ersten Auflage.

So reich unsere Schullitteratur an zum überwiegenden Teil vortrefflichen Lehrbüchern der Mechanik ist — der Verfasser dieses Werkchens konnte trotz eifriger Nachforschung keines ausfindig machen, welches nach Auswahl und Behandlung des Stoffes als Leitfaden für den Unterricht an einer Werkmeisterschule sich eignete, und es wird dies auch leicht erklärlich, wenn man die Beschaffenheit des Schülermaterials, sowie die hiermit verbundene Ausnahmestellung, welche eine Werkmeisterschule fast allen anderen Bildungsanstalten gegenüber einnimmt, in Betracht zieht.

Nachdem ein junger Mann eine gewöhnliche Volksschule durchgemacht, dann seine Lehrzeit als Schmied, Schlosser oder Mechaniker beendet hat und hierauf eine Reihe von Jahren als Maschinenbauer, Monteur etc. praktisch thätig gewesen ist, fühlt er den Drang und die Fähigkeit, in geistiger und sozialer Beziehung eine Stufe höher zu steigen; er fasst — meist im Alter von 20 bis 30 Jahren — den Entschluss, Werkmeister zu werden und sich die hierzu nötige theoretische Bildung an einer in der Regel zwei bis drei Semester umfassenden Werkmeisterschule anzueignen.

Bedenkt man nun, dass ein solcher Schüler vermöge seines Alters und Bildungsgrades geistig wenig elastisch, dafür aber fast ausnahmslos eisern fleissig ist, dass er von dem früher in der Schule Gelernten wohl manches vergessen, dafür aber im praktischen Maschinenbau auch vieles gelernt hat, so ist es dem Fachmanne klar, warum die bekannten Lehrbücher der Mechanik als Leitfaden für den Unterricht an einer Werkmeisterschule gar nicht in Frage kommen können: die meisten noch mit elementaren Hilfsmitteln bearbeiteten Werke sind offenbar zu umfangreich und setzen schon in den ersten Kapiteln einen zu hohen Grad mathematischer Bildung voraus; manche bieten auf der einen Seite zu

viel oder zu hohe Theorie, auf der anderen aber zu wenig Anwendungen; wieder andere thun zu viel des Guten im Erklären und Beschreiben, bringen aber zu wenig Formeln mit daran sich schliessenden Lösen von Zahlenbeispielen; denn der künftige Werkmeister ist mit dem Aussehen und sogar mit der Wirkungsweise verschiedener Maschinen vertraut, not thut ihm aber besonders die Kenntnis der zahlengemässen Bedingungen für jene Wirkungsweise.

Dazu kommt noch, dass auch auf die Anordnung des Stoffes besondere Rücksicht genommen werden muss, weil an den meisten Werkmeisterschulen der mechanische und der mathematische Unterricht zugleich beginnen; es war deshalb nötig, den einzelnen Abschnitten des Leitfadens eine solche Reihenfolge zu geben, dass der Unterricht mit dem jeweiligen mathematischen Wissen und Können des Schülers im Einklange steht, zugleich aber ohne dadurch den logischen Zusammenhang des Ganzen zu gefährden.

Sollte es dem Verfasser einigermassen gelungen sein, den oben angedeuteten Verhältnissen und Bedürfnissen Rechnung zu tragen, so möchte dieses Büchlein solchen angehenden Technikern etc., welche der niederen Mathematik mächtig sind, auch zum Selbststudium empfohlen werden können; nur dürften Betreffende nicht versäumen, womöglich alle dem Werkchen beigefügten Aufgaben und Beispiele, welche übrigens fast ausnahmslos vom Verfasser selbst gebildet worden sind, gewissenhaft zu lösen, bzw. durchzurechnen — nicht nur, um aus dem Wissen ein Können zu machen, sondern auch, um sich für das Verständnis der einer Aufgabengruppe folgenden Paragraphen besser zu befähigen.

Mittweida, im Januar 1888.

Der Verfasser.

Vorwort zur dritten Auflage.

Die erste Auflage dieses von massgebender Seite günstig beurteilten Werkchens war in verhältnismässig sehr kurzer Zeit vergriffen und die Notwendigkeit des Neudruckes trat an den Verfasser so unerwartet schnell heran, dass sich für die zweite Auflage in der Eile nichts weiter thun liess, als die bemerkten Druckfehler zu beseitigen.

Dagegen konnten nunmehr in der dritten Auflage allen berechtigten von der Kritik und den Herren Fachgenossen geäusserten Wünschen Rechnung getragen werden. Neu hinzu gekommen sind infolgedessen die Bewegungsgesetze am Kurbelmechanismus, die Guldinschen Regeln, die Reibung am Keil, viele neue Beispiele und ausserdem wurden die Figuren in den Text gedruckt.

Um aber den Umfang und damit den Preis des Buches dennoch auf der früheren Höhe zu erhalten, entschloss sich Verfasser, sämtliche Beispiele, sodann minder wichtige Beweise und Erklärungen in Kleindruck setzen zu lassen, indem er auf diese Weise allen Seiten gerecht zu werden hofft.

Schliesslich ist es mir eine angenehme Pflicht, denjenigen meiner Herren Fachkollegen, welche an diesem Büchlein Interesse genommen, insofern sie es als Leitfaden in ihrer Anstalt eingeführt, bzw. empfohlen oder auch durch ihre Ratschläge ihm genutzt haben, meinen verbindlichsten Dank auszusprechen. Ich verbinde damit die Bitte, mich auf etwaige Mängel in dieser dritten Auflage gütigst aufmerksam machen zu wollen.

Mittweida, Ostern 1894.

Der Verfasser.

Vorwort zur vierten Auflage.

Mit dieser neuen Auflage fügt sich vorliegende Schrift unter dem Sondertitel „Elementarmechanik“ als erster Teil in ein grösseres Werk, welches als Leidfaden zum Unterricht an technischen Fachschulen, sowie auch für das Selbstudium bestimmt ist.

Der dritten Auflage gegenüber machen sich bei dieser Neubearbeitung durchgreifende Änderungen nach zwei Richtungen hin bemerkbar, indem einerseits die Forderungen an die mathematischen Vorkenntnisse noch weiter herabgesetzt wurden und andererseits die Zahl der Anwendungen auf Maschinenbau und Technik abermals eine wesentliche Vermehrung fand.

In ersterer Hinsicht diente es dem Verfasser zur Richtschnur, sich auf die Betrachtung der Kräfte in der Ebene zu beschränken und alle diejenigen Untersuchungen, welche Bekanntschaft mit Trigonometrie voraussetzen, dem zweiten Teil, welcher die „technische Mechanik“ enthält, zuzuweisen. Zu dem Ende mussten allerdings jene Paragraphen, welche die parallelen Kräfte im Raume, die komplizierteren Schwerpunktsbestimmungen, die Stabilität der Körper, die Guldin'schen Regeln und die Reibung auf der schiefen Ebene, am Keil und an der Schraube enthielten, ausgeschieden werden; es war dies aber zunächst mit dem weiteren Vorteil verknüpft, dass auch der Anspruch auf Vorkenntnissse in der Stereometrie bis auf die Formel für das Cylindervolumen, welche ja heutzutage jede bessere Volksschule lehrt, fallen konnte.

Da nun ausserdem das Verständnis der weggebliebenen Abschnitte zugleich nach der rein mechanischen Seite hin eine verhältnismässig hohe Auffassungskraft verlangte, so war auf diese Weise ein gegen früher bequemerer Weg zur ersten Einführung in das schwierige Studium der Mechanik gefunden; denn darüber

sind sich wohl alle erfahrenen Lehrer an technischen Mittelschulen klar, dass beim Anfangsunterricht in der Mechanik unbedingt nur die leichtestverständlichen Kapitel auszuwählen und dass alle jene mathematischen Hilfsmittel zu vermeiden sind, welche von den Schülern noch nicht bis zu einem gewissen Grade beherrscht werden.

Nicht minder wichtig ist ferner die Berücksichtigung des Umstandes, dass die Schüler derartiger Lehranstalten die Ergebnisse ihres verhältnismässig sehr kurzen Studiums fast ohne Ausnahme baldigst im praktischen Leben verwerten wollen. Der Lehrer für Mechanik sollte deshalb bei Auswahl des möglichst reichlich zu bemessenden Übungsstoffes solche Beispiele und Aufgaben bevorzugen, welche mit der Maschinentechnik in Berührung stehen; er würde hierdurch gleichzeitig das Interesse des Schülers für den Lehrgegenstand erhöhen und eine gründlichere Vorbereitung für die nachfolgenden Fächer erzielen.

In Erwägung dieser Verhältnisse hielt es der Verfasser für angebracht, die oben erwähnten Ausscheidungen aus der dritten Auflage in der vorliegenden vierten Auflage zu ersetzen durch einfache Anwendungen auf den Maschinenbau, über welche er im einzelnen noch folgendes zu bemerken hat.

Da wären erstens zu erwähnen die Paragraphen 30 bis 33, mit deren Neuaufnahme Verfasser hauptsächlich die Absicht verband, die Benützung der Begriffe Totalarbeit, Nutzarbeit, Nebenarbeit, Wirkungsgrad etc. zu praktischen Zwecken darzuthun und fernerhin zu zeigen, wie allerlei Bewegungshindernisse rechnerisch berücksichtigt werden können; dass nebenbei auch noch andere frühere Sätze, namentlich über Geschwindigkeit, Tourenzahl pp. Verwendung fanden, kann nur geeignet sein, die belehrende Wirkung dieser Abschnitte zu verstärken. Auch Schwierigkeiten pädagogischer Natur sind nicht zu fürchten, weil weder besondere Vorkenntnisse vorausgesetzt, noch erhöhte Anforderungen an die Auffassungskraft der Schüler gestellt werden; im Gegenteil beobachtete der Verfasser in seiner Lehrpraxis, dass bei genügend langsamem Vorgehen die Zuhörer gerade diesen Entwickelungen mit besonders reger Teilnahme folgten. Nur in dem Falle, wo etwa wegen eines kurzen Sommersemesters Zeitmangel droht, oder, wenn der Zufall ein besonders ungünstiges Schülermaterial

zusammengewürfelt haben sollte, wäre es ratsam, diese Paragraphen 30 bis 33 (wenigstens vorläufig) zu überschlagen.

Dass dann weiter im vierten Kapitel (§§ 54 bis 58) die Zahl solcher angewandter Aufgaben, zu deren Lösung das Zerlegen, bzw. auch Zusammensetzen von Kräften erforderlich ist, eine bedeutende Vermehrung fand, wird sich der Billigung eines jeden erfreuen, welcher die hohe Wichtigkeit des hier einzuübenden Verfahrens sowohl in theoretischer als in praktischer Hinsicht kennt und welcher zudem vielleicht erfahren hat, wie lange es zu dauern pflegt, bis der Anfänger gerade in der geschickten Zerlegung von Kräften die nötige Sicherheit erlangt.

Ebensowenig fürchtet Verfasser Beanstandung, dass er in § 59 die Zusammensetzung von Kräften nach vorausgegangener Zerlegung in zwei rechtwinklige Achsen, ferner in § 75 die drei allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für ein freies System beliebig vieler Kräfte in der Ebene nebst einigen dazu gehörigen Anwendungen in § 76 neu aufgenommen hat.

Dagegen wäre wohl nicht unmöglich, dass die Behandlung der Seilsteifigkeit (im 10. Kapitel) als zu ausführlich und die Berücksichtigung aller Bewegungswiderstände an den zusammengesetzten Maschinen im 11. Kapitel als zu weit gehend erachtet würde; allein dem Verfasser ist es allmählig zur Gewohnheit geworden, jeden Unterrichtsgegenstand innerhalb der einmal gesteckten Grenzen gründlich zu erledigen, weil ihn die Erfahrung immer wieder gelehrt hat, dass nur auf diese Weise der gehörige Nutzen für den Schüler erzielt wird. Übrigens vermag dieses etwaige „Zuviel“ keinesfalls nachteilig auf den Unterricht einzuwirken, insofern es den Schluss des vorliegenden Leitfadens bildet und deshalb bei Mangel an Zeit von selbst nicht zur Besprechung gelangt.

Mittweida, Ostern 1900.

Der Verfasser.

Inhalts-Verzeichnis.

Erstes Kapitel.

Die wichtigsten Bewegungsarten.

Zweites Kapitel.

Die beiden ersten Grundgesetze der Mechanik. Begriff und Leistung einer Kraft.

Drittes Kapitel.

Das dritte Grundgesetz. Masse. Arbeitsvermögen bewegter Körper.

Viertes Kapitel.

Das vierte Grundgesetz. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte.

Fünftes Kapitel.

Kräfte in der Ebene mit verschiedenen Angriffspunkten.

Sechstes Kapitel.

Von den statischen Momenten der Kräfte.

Siebentes Kapitel.

Einführung in die Lehre vom Schwerpunkt.

Achtes Kapitel.

Die einfachen Maschinen ohne Rücksicht auf Reibung.

Neuntes Kapitel.

Die gleitende Reibung mit besonderer Berücksichtigung der Zapfenreibung und das Bremsdynamometer.

Zehntes Kapitel.

Rollende Reibung, Seilsteifigkeit und Kettenreibung. Wirkungsgrade einfacher Maschinen.

Elftes Kapitel.

Zusammengesetzte Maschinen.

Bemerkte Druckfehler,

welche vor dem Gebrauche des Buches zu berichtigen sind.

Es muss heissen:

Seite 80,	Zeile 19	v. o.	Gleichförmigkeitsgrad, statt Gleichförmigkeit,
„ 128,	„ 3	v. u.	O, statt Q,
„ 254,	„ 14	v. o.	346, statt 246,
„ 256,	„ 14	v. u.	Wenn nämlich, statt Wenn dann,
„ 274,	„ 7	v. o.	dass η, statt dass n.

Einleitung.

Der erste Eindruck, welchen wir von einem Körper erhalten, wird darin bestehen, ob derselbe seine Stellung gegen andere Körper ändert oder nicht; im ersten Falle sagen wir: er bewegt sich, im letzten dagegen heisst es: er ist in Ruhe oder im Gleichgewichte.

Die Mechanik kann nun schlechthin als die Wissenschaft von der Bewegung und dem Gleichgewichte der Körper definiert werden und zerfällt hiernach von selbst in zwei Hauptteile, nämlich in die Bewegungslehre oder Dynamik und in die Lehre vom Gleichgewichte oder Statik. Weil ferner alle Körper in feste, tropfbar flüssige und luft- oder gasförmige eingeteilt werden können, so gliedert sich jeder der beiden Hauptteile der Mechanik wiederum in drei Abschnitte, und das ganze Gebiet der Mechanik umfasst daher sechs Abteilungen, nämlich:

1.	die	Lehre	von der	Bewegung	der	festen	Körper	oder	Geodynamik,
2.	„	„	„	„	„	flüssigen	„	„	Hydrodynamik,
3.	„	„	„	„	„	luftförm.	„	„	Aërodynamik,
4.	„	„	vom Gleichgewichte		„	festen	„	„	Geostatik,
5.	„	„	„	„	„	flüssigen	„	„	Hydrostatik,
6.	„	„	„	„	„	gasförm.	„	„	Aërostatik.

Hierzu wäre noch zu bemerken, dass man die Abschnitte 1 und 4 unter dem Namen Geomechanik, ferner 2 und 5 unter dem Namen Hydromechanik oder auch Hydraulik, sowie 3 und 6 unter dem Namen Aëromechanik zusammenzufassen pflegt, und dass die Aërodynamik auch Pneumatik genannt wird.

Ausserdem unterscheidet man aber auch zwischen einer reinen oder theoretischen und einer angewandten oder praktischen Mechanik; die erstere stützt sich auf nur wenige Erfahrungssätze und leitet daraus mit Hilfe der reinen Mathematik sowohl

die Bewegungsgesetze als auch die Bedingungen des Gleichgewichts ab; die letztere hingegen zeigt, wie die Resultate der theoretischen Mechanik zur Benützung der Naturkräfte verwendet werden können. Schon hieraus folgt, dass die theoretische der praktischen Mechanik notwendig vorausgehen muss.

Ferner pflegt man mit Rücksicht auf den Umfang der mathematischen Hilfsmittel, welche man bei Entwickelung unserer Wissenschaft als bekannt voraussetzt, die Beiworte „elementar" und „analytisch" anzuwenden. Unter Elementarmechanik versteht man eine Mechanik, zu derem Studium die Kenntnis der niederen Mathematik ausreicht, während die analytische Mechanik die Resultate auch der höheren Mathematik benutzt.

Endlich soll der Titel eines mechanischen Lehrbuches zuweilen sogar auf die Auswahl des Stoffes hindeuten, welche der Verfasser nach dem künftigen Berufe derjenigen getroffen hat, an welche er sich wenden will; in dieser Hinsicht spricht man von einer Baumechanik, einer technischen Mechanik, einer Ingenieur-Mechanik etc.

Wir speziell haben uns hier im Hinblick auf den Zweck dieses Werkes die Aufgabe zu stellen, nur das Wichtigste aus der Mechanik fester Körper und zwar, was diesen ersten Teil, die Elementarmechanik, betrifft, lediglich mit den Hilfsmitteln der Algebra und Planimetrie zu entwickeln. Dabei wollen wir die reine und die praktische Mechanik in der Weise verknüpfen, dass sich der theoretischen Ableitung eines Satzes möglichst die sofortige Anwendung desselben auf die Maschinentechnik anschliesst.

Zunächst beschäftigen wir uns mit der Lehre von der Bewegung eines geometrischen Punktes, welche noch als rein mathematische Wissenschaft angesehen werden kann und auch unter den beiden Namen Phoronomie und Kinematik bekannt ist.

Erstes Kapitel.

Die wichtigsten Bewegungsarten.

§ 1.

Einteilung der Bewegungen.

Bei einer jeden Bewegung kommen zunächst zwei Grössen in Betracht, nämlich erstens die Zeit, während welcher ein Punkt sich bewegt und zweitens der Weg, welchen letzterer dabei zurücklegt.

Denkt man sich nun die Zeit der Bewegung in eine beliebige Anzahl gleicher Teile, z. B. in lauter ganze, oder zehntel, oder hundertstel Sekunden, zerlegt, so können die zugehörigen, vom Punkte durchlaufenen Räume entweder ebenfalls gleich lang, oder aber von einander verschieden sein; im ersteren Falle nennt man die Bewegung gleichmässig oder gleichförmig, im letzteren ungleichförmig. Die ungleichmässige Bewegung kann wiederum eine beschleunigte oder verzögerte sein, jenachdem die den gleichen Zeitabschnitten entsprechenden Wegstrecken zu- oder abnehmen.

Endlich unterscheidet man nach der Form der vom Punkte durchlaufenen Bahn geradlinige und krummlinige Bewegungen.

§ 2.

Die gleichförmige Bewegung.

Wenn ein Punkt in einer gewissen Zeit, etwa in *2* Minuten eine bestimmte Strecke, beispielsweise *240 m*, gleichmässig zurücklegt, so ergiebt sich der in jeder Sekunde durchlaufene Weg ganz offenbar dadurch, dass man den Gesamtweg durch die verbrauchte Sekundenzahl dividiert, also für den angenommenen Spezialfall

$$240 : 120 = 2\ m.$$

Dieser bei der gleichförmigen Bewegung in einer Sekunde zurückgelegte Weg heisst die Geschwindigkeit des Punktes und erhält in der Regel die Bezeichnung c oder auch v. Bezeichnet man ausserdem die Sekundenzahl mit t und den in dieser Zeit vom Punkte zurückgelegten Weg mit s, so gilt allgemein die Formel

$$c = \frac{s}{t}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

sodass also, wie schon erwähnt, die Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung erhalten wird, indem man den durchlaufenen Weg durch die verbrauchte Anzahl von Sekunden dividiert.

Aus No. 1 folgt weiter

$$s = c\,t$$

oder in Worten: Bei der gleichförmigen Bewegung ist der Gesamtweg das Produkt aus der Geschwindigkeit und der in Sekunden ausgedrückten Zeit, und endlich ergiebt sich aus der letzten Gleichung

$$t = \frac{s}{c},$$

demnach die Regel: Behufs Berechnung der Zeit, welche ein Punkt braucht, um bei bekannter Geschwindigkeit einen bestimmten Weg zurückzulegen, hat man diesen durch jene zu dividieren.

Mit Hilfe der vorstehenden drei Formeln, resp. Regeln, können alle Aufgaben gelöst werden, welche sich auf gleichförmige Bewegungen beziehen; nur ist im Auge zu behalten, dass die Zeit t stets in Sekunden auszudrücken ist, sowie dass der Gesamtweg s und die Geschwindigkeit c immer mit derselben Längeneinheit gemessen sind.

§ 3.

Übungsbeispiele.

1. Mit welcher Geschwindigkeit lief ein Reitpferd, welches in *32* Minuten einen Weg von *7968 m* gleichmässig zurücklegte?

Lösung: In diesem Falle ist der Gesamtweg $s = 7968\ m$, die Zeit $t = 32' = 32 \cdot 60 = 1920''$ und folglich nach Formel 1

$$c = \frac{s}{t} = \frac{7968}{1920} = \mathbf{4{,}15\ m},$$

die Geschwindigkeit des Reitpferdes.

2. Welchen Weg in geographischen Meilen (*à 7420 m*) kann ein geübter Schlittschuhläufer bei *9 m* Geschwindigkeit während *2* Stunden zurücklegen?

Lösung: Hier hat man $c = 9\ m$ und $t = 2$ St. $= 120'$ $= 7200''$, mithin ergiebt sich nach der zweiten Formel

$$s = c\,t = 9 \cdot 7200 = 64800\ m = \frac{64800}{7420} = \mathbf{8{,}73\ Meilen.}$$

3. In welcher Zeit würde ein Schnellzug bei ununterbrochener Fahrt und *12,5 m* Geschwindigkeit unseren nächsten Himmelskörper, den Mond, erreichen, wenn letzterer gerade *52000* Postmeilen (*à 7500 m*) von der Erde entfernt ist?

Lösung: Es ist gegeben der Gesamtweg $s = 52000 \cdot 7500\ m$, die Geschwindigkeit $c = 12{,}5\ m$, und man erhält mittels der dritten Formel die Zeit

$$t = \frac{s}{c} = \frac{52000 \cdot 7500}{12{,}5} = 31200000'' = \mathbf{361{,}11\ Tage.}$$

4. In welcher Zeit gelangt ein Lichtstrahl von der Sonne zur Erde, wenn die Entfernung beider zu *20* Millionen und die Geschwindigkeit des Lichtes zu *40* Tausend Meilen angenommen wird?

Antwort: In *8* Minuten *20* Sekunden.

5. Wie lange braucht eine Brieftaube, um bei *30 m* Geschwindigkeit einen Weg von *9 km* zurückzulegen?

Antwort: *5* Minuten.

6. Wie gross ist die Geschwindigkeit eines Dampfschiffes, welches in der Stunde *18 km* zurücklegt?

Antwort: *5 m*.

7. Wenn zum Herausziehen einer Tonne aus einem *210 m* tiefen Schacht zwei und eine halbe Minute Zeit erforderlich ist, welches ist dann die Geschwindigkeit jener Tonne?

Antwort: *1,4 m*.

8. Welche Geschwindigkeit besitzt ein Infanterist, welcher in der Minute *120* Schritte *à 0,8 m* macht?

Antwort: *1,6 m.*

9. Welchen Weg legt derselbe bei ununterbrochenem Marsche pro Stunde zurück?

Antwort: *5,76 km.*

10. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich ein horizontales Sägegatter, welches *200* Touren oder *400* Schnitte in der Minute macht, wenn jeder Zug *0,69 m* lang ist?

Antwort: Mit *4,6 m* Geschwindigkeit.

§ 4.

Die gleichförmige Kreisbewegung.

Zwar sind die in § 2 entwickelten Gesetze für die gleichförmige Bewegung von der Form des zurückgelegten Weges ganz unabhängig und daher ebensowohl für jede krummlinige als geradlinige Bewegung giltig, aber es erscheint dennoch geboten, diejenige gleichmässige Bewegung, welche von einem Punkte auf der Peripherie eines Kreises erfolgt, noch besonders zu untersuchen.

Aus Gründen der Zweckmässigkeit hat man nämlich bei dieser für die Maschinenlehre so wichtigen Bewegungsart anstatt des Gesamtweges und der Zeit die beiden folgenden Grössen eingeführt:

1. den Halbmesser der Kreisbahn, welcher allgemein mit r bezeichnet wird, und

2. die sogenannte Umlaufs- oder Tourenzahl, welche angiebt, wie oftmal der Punkt den Kreisumfang in einer Minute durchläuft und welche wir mit n bezeichnen wollen.

Die Geschwindigkeit behält ihre Bedeutung (Weg pro Sekunde) und Bezeichnung (c oder v) bei, wird aber hier aus nahe liegendem Grunde gewöhnlich auch Umfangsgeschwindigkeit genannt.

Die Beziehung, in welcher die vorstehenden drei Grössen c, r und n zu einander stehen, finden wir durch folgende einfache Schlüsse: die Länge vom Umfange eines Kreises vom Halbmesser r ist bekanntlich

$$2 r \pi,$$

folglich beträgt der vom Punkte während einer Umdrehung

durchlaufene Weg ebenfalls $2r\pi$, also in einer Minute das $n$fache, nämlich

$$2r\pi \cdot n,$$

und mithin ergiebt sich der Weg per Sekunde, das ist die Umfangsgeschwindigkeit

$$c = \frac{2r\pi \cdot n}{60} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Bei Anwendungen dieser Formel möge man sich stets vergegenwärtigen, dass n eine unbenannte Zahl darstellt, sowie, dass c und r mit gleicher Einheit gemessene Längen sind.

Im Maschinenbau ist zur Angabe von Dimensionen das Millimeter allgemein gebräuchlich, während Geschwindigkeiten fast immer durch das Meter ausgedrückt werden. Diesem Umstande hat man Rechnung getragen durch die in der Praxis übliche Beziehung

$$c = \frac{2r\pi \cdot n}{60 \cdot 1000},$$

worin nun r in Millimetern, dagegen c in Metern zu verstehen sind.

Wenn r bekannt ist, so kann eine nicht unwesentliche Rechnungserleichterung erzielt werden, indem man $2r\pi$ als Umfang eines Kreises vom Radius r aus den Tabellen entnimmt, wie sie sich in jedem technischen Handbuche und Ingenieurkalender vorfinden.

§ 5.

Übungsbeispiele.

11. Wie gross ist die Geschwindigkeit eines Punktes am Rande eines vertikalen Wasserrades, welches *6 m* hoch ist und sich in einer Minute *4*mal umdreht?

Lösung: Bekannt ist $d = 6\ m$, folglich $r = 3\ m$ und $n = 4$; man findet daher mittels Formel 2 die Umfangsgeschwindigkeit

$$c = \frac{6\pi \cdot 4}{60} = \frac{3{,}1416 \cdot 4}{10} = \mathbf{1{,}257\ m}.$$

12. Erfahrungsgemäss muss für einen guten Mahlprozess bei *100* Umläufen pro Minute die Umfangsgeschwindigkeit *7,6 m* betragen; welchen Durchmesser müsste man demnach dem Steine geben?

Lösung: Aus $n = 100$ und $c = 7{,}6\ m$ folgt nach Formel 2, wenn man darin $2\,r = d$ setzt und ausserdem mit 60 multipliziert,

$$7{,}6 \cdot 60 = 100\,d\,\pi$$

und hieraus

$$d = \frac{4{,}56}{\pi} = 1{,}453\ m = \mathbf{1453\ mm.}$$

13. Wie viele Umgänge in der Minute macht eine Turbine, deren Radius $300\ mm$ und deren Umfangsgeschwindigkeit $11\ m$ beträgt?

Lösung: Mit Einsetzung von $r = 300$ und $c = 11$ in die obige Beziehung

$$c = \frac{2\,r\,\pi \cdot n}{60 \cdot 1000}$$

erhält man

$$11 = \frac{600\,\pi\,n}{60000} = \frac{\pi\,n}{100}$$

und hieraus

$$n = \frac{1100}{\pi} = \mathbf{350.}$$

14. An einem Göpel von $5\ m$ Länge zieht ein Pferd mit $1{,}2\ m$ Geschwindigkeit; wie viel Umdrehungen in der Minute macht die Welle des Göpels?

Antwort: Circa $2{,}3$ Umdrehungen.

15. Welche Umfangsgeschwindigkeit besitzt ein $5\ m$ hohes Schwungrad bei 42 Touren in der Minute?

Antwort: Rund $11\ m$.

16. Wie lang muss der Durchmesser einer Riemenscheibe gewählt werden, um bei einer Umfangsgeschwindigkeit von $4\ m$ 55 Umläufe per Minute zu erzielen?

Antwort: $1390\ mm$.

17. Mit welcher Geschwindigkeit fährt eine Lokomotive, deren Triebräder $1{,}6\ m$ hoch sind und in einer Minute 126 Umgänge machen?

Antwort: Mit $10{,}55\ m$ Geschwindigkeit.

18. Man berechne die Geschwindigkeit am Umfange eines Schwungrades, welches $4{,}85\ m$ hoch ist und in der Minute 68 Umläufe macht.

Lösung: $c = 17{,}266\ m$.

19. In der Rennbahn eines Pferdegöpels läuft ein schweres Zugpferd am vorteilhaftesten mit *0,85 m* Geschwindigkeit; welchen Durchmesser muss man der Bahn geben, wenn das Pferd in jeder Minute einen Umlauf machen soll?

Antwort: Einen Durchmesser von *16,24 m* Länge.

20. Ein Zahnrad soll mit *2 m* Umfangsgeschwindigkeit laufen und *1800 mm* Halbmesser erhalten; welche Tourenzahl ergiebt sich für dasselbe?

Antwort: $n = 10{,}6$.

§ 6.

Riemen- und Räderverbindungen.

Wenn zwei um ihre Mittelpunkte drehbare kreisrunde Scheiben durch einen über sie gelegten, straff gespannten und endlosen Riemen verbunden sind (Fig. 1), so überträgt sich die Umfangsgeschwindigkeit der einen Scheibe auf die andere. Sind also c_1 und c_2 die Umlaufsgeschwindigkeiten der treibenden, resp. getriebenen Scheibe, so gilt die Beziehung

$$c_1 = c_2.$$

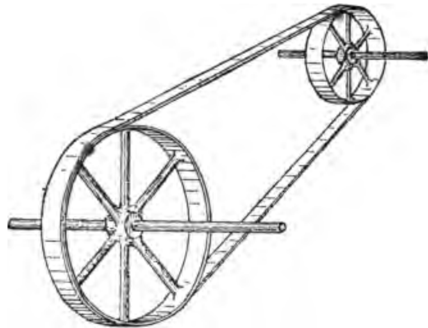


Fig. 1.

Bezeichnen wir nun die Tourenzahlen und die Halbmesser beider Riemenscheiben mit n_1 und r_1 (Fig. 2), beziehungsweise mit n_2 und r_2, so haben wir nach Formel 2

$$c_1 = \frac{2\, r_1\, \pi\, n_1}{60}, \text{ sowie } c_2 = \frac{2\, r_2\, \pi\, n_2}{60}$$

und durch Gleichsetzung dieser beiden Werte von c_1 und c_2 ergiebt sich

$$n_1\, r_1 = n_2\, r_2, \quad \ldots\ldots \quad (3a)$$

woraus folgt

$$n_1\,(2\, r_1) = n_2\,(2\, r_2)$$

und das ist

$$n_1\, d_1 = n_2\, d_2 \quad \ldots\ldots \quad (3b)$$

oder in Worten: Das Produkt aus Tourenzahl und Durchmesser ist für die beiden durch einen Riemen verbundenen Scheiben dasselbe.

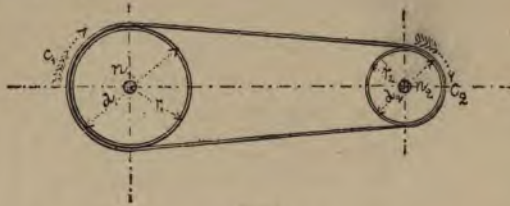


Fig. 2.

Dieses Gesetz gilt offenbar auch für zwei cylinderförmige Scheiben A und B mit parallelen Achsen (Fig. 3), welche sich an ihren Umfängen berühren und so stark an einander gepresst werden, dass vermöge der entstehenden Reibung das eine Rad dem andern seine Umfangsgeschwindigkeit mitteilt. Sie heissen deshalb Reibungsräder, können aber mit Nutzen nur bei Übertragung geringerer Kräfte Verwendung finden.

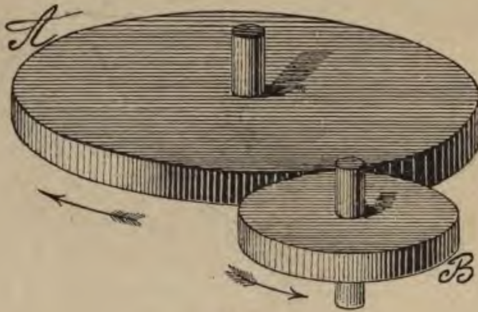


Fig. 3.

Im Falle grösserer Kraftwirkungen bedient man sich genau zusammen arbeitender Zahnräder, bezüglich welcher noch folgendes erörtert werden möge.

Derjenige Druckpunkt C (Fig. 4), welcher mit den beiden Rädermittelpunkten in einer Geraden liegt, heisst der Zentralpunkt und die beiden um die ersteren durch C gelegten, also sich berührenden Kreise nennt man im Maschinenbau die Teilkreise. Wenn nun die Radien der letzteren mit r_1, bezw. r_2 und die zugehörigen Umlaufszahlen der Räder mit n_1, bezw. n_2

bezeichnet werden, so ist ganz klar, dass für die Bewegung zweier im genauen Eingriff stehender Zahnräder wieder die Formel 3 besteht, indem ja die beiden Teilkreise sich gerade so wie zwei Reibungsräder bewegen.

Weiter ist es aber von praktischem Wert, dass hierbei an die Stelle der Radien r_1, r_2 auch die Zähnezahlen z_1, z_2 beider Räder treten dürfen. Um dies zu beweisen, schicken wir voraus, dass ein zwischen den Mittellinien zweier Nachbarzähne liegendes Bogenstück des Teilkreises im Maschinenbau allgemein die **Teilung** genannt und mit t bezeichnet wird. Diese Teilung

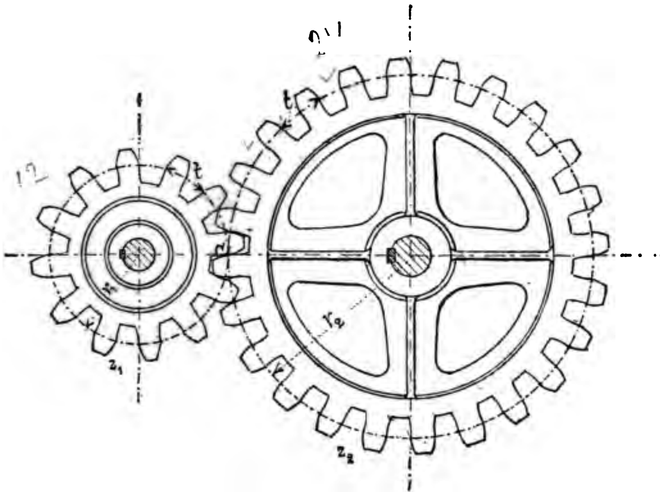


Fig. 4.

ist nun nach obigem für beide Zahnräder gleich, und es sind daher die Umfänge beider Teilkreise

$$2\, r_1\, \pi = t\, z_1,\quad 2\, r_2\, \pi = t\, z_2,$$

demnach die Radien

$$r_1 = \frac{t\, z_1}{2\, \pi},\ r_2 = \frac{t\, z_2}{2\, \pi},$$

und wir erhalten mit Einsetzung dieser Werte in No. 3

$$\frac{n_1\, t\, z_1}{2\, \pi} = \frac{n_2\, t\, z_2}{2\, \pi}$$

oder

$$n_1\, z_1 = n_2\, z_2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

d. h.: Die Produkte aus Umlaufs- und Zähnezahl sind für beide zusammen arbeitende Räder einander gleich.

§ 7.

Übungsbeispiele.

21. Von zwei durch einen Riemen verbundenen Scheiben hat die erste *1,5 m* Durchmesser und macht *48* Umdrehungen per Minute. Wie gross muss der Radius der anderen Scheibe gewählt werden, um *100* Touren zu erzielen?

Lösung: Aus $n_1 = 48$, $r_1 = 0{,}75\ m$ und $n_2 = 100$ folgt laut Formel 3

$$48 \cdot 0{,}75 = 100\, r_2 \text{ und hieraus } \boldsymbol{r_2 = 0{,}36\ m},$$

die zweite Scheibe muss demnach einen Halbmesser von *360 mm* erhalten.

22. Ein Kegelrad von *108* Zähnen und *22* Umdrehungen in der Minute greift in ein Trieb mit *24* Zähnen, welches auf einer Mühlspindel sitzt. Wie viel Umläufe pro Minute macht die letztere?

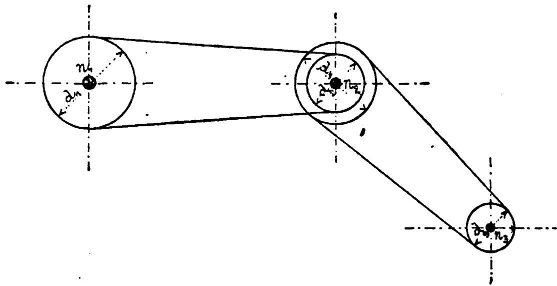


Fig. 5.

Lösung: Mit Einsetzung von $z_1 = 108$, $n_1 = 22$ und $z_2 = 24$ in Formel 4 ergiebt sich

$$108 \cdot 22 = 24\, n_2 \text{ und mithin ist } \boldsymbol{n_2 = 99},$$

die Umlaufszahl der Mühlspindel.

23. Auf der mit *75* Umdrehungen laufenden Transmissionswelle einer Maschinenfabrik sitzt eine Riemenscheibe von *84 cm* Durchmesser und treibt eine Riemenscheibe von *45 cm* Durchmesser auf einer Drehbankspindel. Wie viel Touren macht die letztere in einer Minute?

Antwort: *140.*

24. Wie gross müsste aber der Durchmesser der Scheibe auf der Drehbankspindel sein, wenn letztere nur *100* Umdrehungen machen soll?

Antwort: *630 mm* gross.

25. Auf der Welle eines Pferdegöpels, welche sich in *10* Minuten *13* mal umdreht, sitzt ein Rad mit *160* Zähnen und greift in ein Trieb mit *20* Zähnen; man bestimme hieraus die Tourenzahl des Triebes.

Auflösung: $n = 10{,}4$.

26. Eine Ventilatorwelle soll durch eine Riemenscheibe von *2 m* Durchmesser getrieben werden und mit *1500* Touren laufen. Welchen Durchmesser muss man der auf die Ventilatorwelle aufzukeilenden Scheibe geben, wenn sich die treibende Scheibe *135* mal in der Minute umdreht?

Antwort: Einen Durchmesser von *180 mm.*

27. Durch eine Riemenscheibe von *450 mm* Durchmesser (Fig. 5), welche auf der mit *70* Touren laufenden Transmissionswelle einer Fabrik aufgekeilt ist, wird eine auf der Vorgelegewelle befindliche Riemenscheibe von *350 mm* Durchmesser getrieben. Auf der Vorgelegewelle sitzt eine zweite Riemenscheibe mit *420 mm* Durchmesser und von dieser wird die Riemenscheibe der Drehbankspindel getrieben. Welchen Durchmesser muss die letzte Scheibe erhalten, wenn sich die Spindel *140* mal in der Minute drehen soll?

Antwort: *270 mm* gross.

Fig. 6.

28. Von einer Dampfmaschine, welche in der Minute $n = 60$ Touren macht, sollen mittels eines $d = 5600$ *mm* hohen Seilschwungrades (Fig. 6) drei in verschiedenen Stockwerken liegende Transmissionen getrieben werden. Die Transmissionswelle

der ersten Etage soll $n_1 = 140$, diejenige
„ zweiten „ „ $n_2 = 160$ und diejenige
„ dritten „ „ $n_3 = 240$ Umdrehungen

pro Minute machen. Welche Durchmesser müssen die drei Seilscheiben erhalten?

Resultate: $d_1 = 2400\ mm$, $d_2 = 2100\ mm$, $d_3 = 1400\ mm$.

29. Ein zum Betriebe einer Mühlspindel dienendes Wasserrad macht $n_1 = 6$ Umdrehungen in der Minute und trägt an

seiner Welle ein Zahnrad mit $Z = 150$ Zähnen (Fig. 7), welches in ein Trieb mit $z = 36$ Zähnen eingreift. Auf der Welle des letzteren sitzt wieder ein Kegelrad von $Z_1 = 120$ Zähnen, welches schliesslich ein Trieb mit $z_2 = 30$ Zähnen auf der Mühlspindel in Bewegung setzt; man berechne die Umlaufszahlen des ersten Triebes und der Mühlspindel.

Resultate: $n_2 = 25$ und $n_3 = 100$.

§ 8.

Die mittlere Geschwindigkeit.

Die in § 2 aufgestellte Definition der Geschwindigkeit (als Weg pro Sekunde) gilt lediglich für die gleichmässige Bewegung. Wenn dagegen ein Punkt sich ungleichmässig bewegt

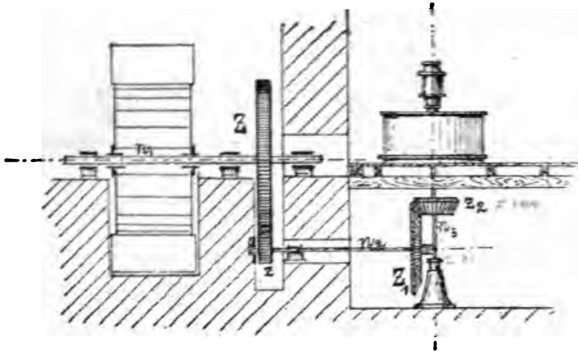


Fig. 7.

und in einer bestimmten Zeit (*t* Sekunden) einen bestimmten Weg (*s*) zurücklegt, so spricht man von einer durchschnittlichen oder mittleren Geschwindigkeit und versteht darunter diejenige gedachte Geschwindigkeit, welche jener Punkt haben müsste, um in eben derselben Zeit *t* genau dieselbe Wegeslänge *s* gleichförmig zurückzulegen, welche doch in Wirklichkeit ungleichmässig durchlaufen wurde.

Es folgt hieraus, dass die mittlere Geschwindigkeit γ eines ungleichförmig bewegten Punktes mit derselben Formel 1 bestimmt werden kann, welche das Gesetz für die gleichmässige Bewegung ausdrückt, dass also

$$\gamma = \frac{s}{t} \text{ ist.}$$

Wenn z. B. ein Eisenbahnzug in drei Stunden oder *10800* Sekunden die Strecke von *90* Kilometern zurücklegte, so war während dieser Zeit seine mittlere Geschwindigkeit

$$\frac{90000}{10800} = 8^1/_3\ m,$$

wie auch immer rasche und langsame Fahrt, sowie Stillstand an den Zwischenstationen aufeinander gefolgt sein mögen.

Aus der letzten Gleichung ergiebt sich weiter

$$s = \gamma\, t,$$

eine Formel, mittels welcher man den von einem Punkte in der Zeit t ungleichförmig zurückgelegten Weg unter der Voraussetzung berechnen kann, dass die mittlere Geschwindigkeit jenes Punktes innerhalb derselben Zeit bekannt ist.

§ 9.

Übungsbeispiele und Geschwindigkeitstabelle.

30. Wie gross war die durchschnittliche Geschwindigkeit eines Schiffes, welches in *50* Stunden den Weg von Calais nach Cork, eine Strecke von *100* deutschen Meilen (*à 7500 m*) zurücklegte?
Antwort: $\gamma = 4^1/_6\ m$.

31. Wie gross ist die mittlere Geschwindigkeit eines Schnellzuges bei *9* deutschen Meilen in der Stunde?
Antwort: *18,75 m.*

32. Ein Körper schwimmt auf einem Flusse in *2* Stunden *900 m* weit; wie gross berechnet sich hieraus die mittlere Geschwindigkeit des Wassers an der Oberfläche des Flusses?
Antwort: *0,125 m.*

Um den Leser über die in Wirklichkeit vorkommenden mittleren Geschwindigkeiten einigermassen zu orientieren, geben wir hier noch eine Geschwindigkeitstabelle.

Es beträgt nämlich durchschnittlich die Geschwindigkeit für

Fussgänger	*1,5*	Meter in der Sekunde
Pferd im Schritt	*1*	„ „ „ „
„ „ Trabe	*2*	„ „ „ „
„ „ Galopp	*4* bis *6*	„ „ „ „

Rennpferd	*16* bis *18*	Meter in der Sekunde
Kurierzüge	*20* „ *22*	„ „ „ „
Schnellzüge	*12* „ *16*	„ „ „ „
Gewöhnliche Personenzüge .	*8* „ *10*	„ „ „ „
Güterzüge	*5* „ *7*	„ „ „ „
Postwagen	*3*	„ „ „ „
Frachtwagen	*0,8*	„ „ „ „
Dampfschiffe	*5*	„ „ „ „
Gewöhnlicher Wind . . .	*3*	„ „ „ „
Sturmwind	*15*	„ „ „ „
Orkan	*40* bis *60*	„ „ „ „
Flintenkugel	*480*	„ „ „ „
Schall	*340*	„ „ „ „
Licht	*305704000*	„ „ „ „
Elektrizität im Kupferdraht .	*371000000*	„ „ „ „
Ventilatorenflügel am Umfang	*30* bis *40*	„ „ „ „
Kreissäge am Umfang . .	*12*	„ „ „ „
Mühlstein am Umfang . .	*7*	„ „ „ „
Kolben mittelgrosser Dampfmaschinen	*1,2* bis *3*	„ „ „ „

§ 10.

Der Kurbelmechanismus.

In der Maschinentechnik macht es sich zuweilen erforderlich, entweder eine kreisförmige in eine geradlinige Bewegung zu verwandeln, beispielsweise beim Sägegatter, bei Pumpen und Stossmaschinen, oder auch umgekehrt eine geradlinig hin- und hergehende in eine Kreisbewegung umzusetzen, wie wir dies an Dampfmaschinen, Lokomotiven und Gasmotoren beobachten können. In beiden Fällen wird der Zweck erreicht durch den sogenannten einfachen Kurbelmechanismus, mit welchem wir uns näher bekannt machen wollen.

Zu diesem Behufe zeigt Figur 8 die Anordnung der Teile einer solchen Vorrichtung, wie sie insbesondere bei den Dampfmaschinen allgemein Anwendung findet: der durch Dampf getriebene Kolben h, sowie die an letzterem befestigte Kolbenstange i und der Kreuzkopf k machen eine hin- und hergehende

geradlinige Bewegung, während sich die Kurbel w an der Welle o mit dem Zapfen u im Kreise dreht und das Verbindungsglied zwischen Kreuzkopf und Kurbelzapfen, die Schubstange j, in schwingender Bewegung sich befindet.

Vor allem ist jetzt leicht zu erweisen, dass, indem der Kurbelzapfen u den Halbkreis über der verlängerten Schubstange durchläuft, also von α nach β gelangt (siehe Fig. 9), dass dann in derselben Zeit der Kreuzkopf k einen Weg $a\, b$ zurücklegt, welcher dem Durchmesser des Kurbelzapfenkreises gleich ist; denn bezeichnen wir die Längen von Kurbelradius $o\, u$ und Schubstange $k\, u$ mit r und l, so folgt aus $\alpha\, a = l$ und $\beta\, b = l$

$$\alpha\, a = \beta\, b$$

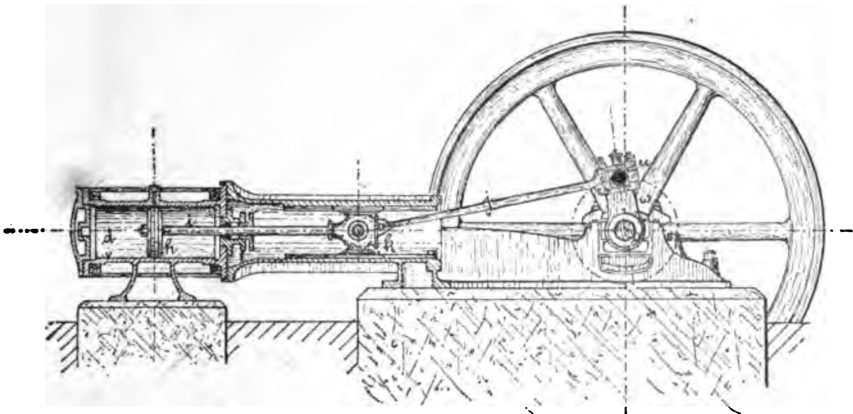


Fig. 8.

oder, wenn man auf beiden Seiten $\beta\, a$ subtrahiert,

$$\alpha\, a - \beta\, a = \beta\, b - \beta\, a$$

und das ist

$$\alpha\, \beta = a\, b = 2\, r,$$

die oben aufgestellte Behauptung.

Weil aber der Kolben mit dem Kreuzkopf in fester Verbindung steht und mithin beide genau gleiche Wege zurücklegen müssen, weil ferner der Weg des Kolbens während einer halben Schwungradumdrehung kurzweg Kolbenhub genannt wird, so gilt weiter der Satz: Bei jeder Dampfmaschine sind Kolbenhub

und Durchmesser des Kurbelzapfenkreises einander gleich. Bezeichnet also s die Länge des Kolbenhubes, so besteht die Formel

$$s = 2\,r.$$

Wir wollen jetzt in den Vergleich zwischen den beiden Bewegungen des Kurbelzapfens und des Kreuzkopfes, bezw. Kolbens, noch tiefer eingehen und zu dem Ende annehmen, dass — wie es ja auch in der Wirklichkeit zutrifft — die Kreisbewegung eine gleichförmige ist, dass also der Kurbelzapfen von α aus in gleichen Zeiten die gleichen Bögen $\alpha\,\alpha_1$, $\alpha_1\,\alpha_2$, $\alpha_2\,\alpha_3 \cdots$ durchläuft. Dann sind die entsprechenden Wege irgend eines Punktes auf der Kolbenstange, demnach auch des Kreuzkopfes und des Kolbens, die Projektionen jener Kreisbögen auf den

Fig. 9

Durchmesser $\alpha\,\beta$, nämlich $\alpha\,\beta_1$, $\beta_1\,\beta_2$, $\beta_2\,o \cdots$ und zwar, wie man aus Figur 9 deutlich erkennt, unter einander ungleich; denn sie nehmen von α aus nach o hin zu und hierauf wieder ab.

Mithin bewegt sich die Kolbenstange nebst Kolben und Kreuzkopf ungleichförmig, und es kann daher für uns nur von einer durchschnittlichen Kolbengeschwindigkeit γ die Rede sein. Um dieselbe zu entwickeln, bezeichnen wir die Tourenzahl des Schwungrades mit n und bedenken, dass der Weg des Kolbens während einer Schwungradumdrehung

$$2\,s = 4\,r,$$

folglich innerhalb einer Minute das n-fache

$$2\,s\,n = 4\,r\,n$$

beträgt. Es ist also der durchschnittliche Weg per Sekunde oder die mittlere Geschwindigkeit des Kolbens der sechzigste Teil davon, nämlich

$$\gamma = \frac{s\,n}{30} = \frac{r\,n}{15} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Da endlich die Umfangsgeschwindigkeit des Kurbelzapfens direkt nach Formel 2

$$c = \frac{r\,\pi\,n}{30}$$

sich ergiebt, so erhalten wir durch Division der letzten beiden Gleichungen

$$c : \gamma = \pi : 2,$$

das Verhältnis zwischen der Umfangsgeschwindigkeit des Kurbelzapfens und der mittleren Kolbengeschwindigkeit.

§ 11.

Übungsbeispiele.

33. Man soll mittels der letzten Proportion c durch γ und umgekehrt γ durch c ausdrücken.

Resultate: $c = \frac{\pi}{2}\,\gamma = 1{,}5708\,\gamma$ und $\gamma = \frac{2}{\pi}\,c = 0{,}6366\,c$.

34. Wie gross ist die mittlere Kolbengeschwindigkeit einer Dampfmaschine, wenn die Hublänge $0{,}93\,m$ und die Umlaufszahl des Schwungrades gleich 50 ist?

Antwort: $\gamma = 1{,}55\,m$.

35. Die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens zu berechnen, wenn die Kurbel $600\,mm$ lang ist und in der Minute 35 Touren macht?

Antwort: $c = 2{,}2\,m$.

36. Welches ist dann die mittlere Kolbengeschwindigkeit?

Antwort: $\gamma = 1{,}4\,m$.

§ 12.

Die gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Eine Bewegung, bei welcher die Geschwindigkeit in gleichen Zeiträumen um gleich viel zunimmt, heisst gleichförmig beschleunigt; es ist hier das Verständnis für folgende fünf Begriffe nötig:

1. die Zeit t und

2. der **Gesamtweg** s behalten die in § 2 angegebene Bedeutung,

3. die **Anfangsgeschwindigkeit** ist der Weg, welchen der Punkt innerhalb der ersten Sekunde zurücklegen würde, wenn keine Geschwindigkeitszunahme stattfände und soll mit c bezeichnet werden,

4. die sogenannte **Beschleunigung**, welche wir immer mit p bezeichnen wollen, ist das **Wachstum der Geschwindigkeit pro Sekunde**, und

5. die **Endgeschwindigkeit** ist die Strecke, welche der Punkt nach der Zeit t in der nächsten Sekunde durchlaufen würde, wenn die Bewegung nach der t-ten Sekunde plötzlich in eine gleichförmige überginge; diese Grösse soll in der Folge die Bezeichnung v erhalten.

An die vorstehenden Definitionen anknüpfend, erhalten wir eine Beziehung zwischen den vier Grössen c, p, t und v durch folgende einfache Betrachtung: es ist offenbar die Geschwindigkeit des Punktes

zu	Anfang	der	ersten	Sekunde	$= c$,
am	Ende	„	„	„	$= c + p$,
„	„	„	zweiten	„	$= c + 2p$,
„	„	„	dritten	„	$= c + 3p$,
.	.	.	.	.	. . .,
.	.	.	.	.	. . .,

mithin

am Ende der t-ten Sekunde $= c + tp$,

und weil die Geschwindigkeit nach Verlauf von t Sekunden nichts anderes als die Endgeschwindigkeit v ist, so gilt die Gleichung

$$v = c + pt. \qquad (6)$$

Diese Formel lässt uns zwar die Natur der gegenseitigen Abhängigkeit zwischen den vier Grössen c, p, t und v erkennen, giebt jedoch keinen Aufschluss über den vom Punkte in der Zeit t zurückgelegten Gesamtweg s.

Da aber bei dieser Bewegungsart die Geschwindigkeit von c bis v ganz **gleichmässig** zunimmt, so ist der in t Sekunden

durchlaufene Raum offenbar ebenso gross, als wenn die Bewegung eben so lange gleichförmig vor sich ginge mit einer mittleren Geschwindigkeit

$$\gamma = \frac{c+v}{2},$$

es ist daher auf Grund der Formel $s = \gamma\, t$ (in § 5) der Gesamtweg

$$s = \frac{c+v}{2}\,t. \qquad \ldots \ldots \qquad (7)$$

Setzt man jetzt den Wert von v aus 6 in 7 ein, so ergiebt sich weiter

$$s = \frac{c+c+p\,t}{2}\,t = \frac{2\,c\,t + p\,t^2}{2},$$

oder auch

$$s = c\,t + \frac{p}{2}\,t^2. \qquad \ldots \ldots \qquad (8)$$

Eine dritte wichtige Beziehung für s entsteht endlich dadurch, dass man aus der 6. Formel

$$t = \frac{v-c}{p}$$

in die 7. Gleichung einführt, nämlich, weil zugleich

$$(v+c)\,(v-c) = v^2 - c^2$$

ist,

$$s = \frac{v^2 - c^2}{2\,p}. \qquad \ldots \ldots \qquad (9)$$

Für den besonderen Fall, dass ein Punkt vom Ruhezustande aus in eine gleichförmig beschleunigte Bewegung übergeht, ist seine Anfangsgeschwindigkeit Null, und wir erhalten folglich die hierher gehörigen Formeln dadurch, dass wir in den Gleichungen 6 bis 9

$$c = 0$$

setzen, nämlich

$$v = p\,t \qquad \ldots \ldots \qquad (10)$$

und

$$s = \frac{v}{2}\,t = \frac{p}{2}\,t^2 = \frac{v^2}{2\,p}. \qquad \ldots \ldots \qquad (11)$$

Die Lösung von Aufgaben, welche auf gleichförmig beschleunigte Bewegung Bezug haben, erfolgt nun in der Weise, dass man in den vorstehenden Formeln die gegebenen Zahlen an die Stelle der bezüglichen Buchstaben setzt und dann die entstehenden Gleichungen für die gesuchten Grössen auflöst.

§ 13.

Übungsbeispiele.

37. Ein Körper beginnt seine Bewegung mit *1,5 m* Geschwindigkeit, welche mit jeder Sekunde um *0,25 m* wächst. Wie gross ist seine Geschwindigkeit nach *3* Minuten und welchen Weg hat der Körper in dieser Zeit zurückgelegt?

Auflösung: Durch Substitution von $c = 1{,}5$; $p = 0{,}25$ und $t = 180$ in die Formeln 6 und 8 erhält man

$$v = c + p\,t = 1{,}5 + 0{,}25 \cdot 180 = \mathbf{46{,}5\ m}$$

als Endgeschwindigkeit, sowie

$$s = c\,t + \frac{p}{2}\,t^2 = \frac{3}{2} \cdot 180 + \frac{1}{8}\,(180)^2 = \mathbf{4320\ m,}$$

den in drei Minuten durchlaufenen Weg des Körpers. Letzteren hätte man auch mit Benützung von $v = 46{,}5$ etwas kürzer nach Formel 7 berechnen können.

38. Welches war die Beschleunigung eines Punktes, dessen Geschwindigkeit während einer Minute von *3* auf *123 m* stieg?

Auflösung: Mit Einführung der gegebenen Werte $c = 3$, $v = 123$ und $t = 60$ in die Beziehung 6 entsteht

$$123 = 3 + p \cdot 60, \text{ woraus folgt } \mathbf{p = 2\ m}.$$

39. Wie gross war aber die Beschleunigung eines Körpers, welcher seine Bewegung mit *4 m* anfing und in einer Minute eine Strecke von *2400 m* durchlief?

Auflösung: Setzt man $s = 2400$, $c = 4$ und $t = 60$ in No. 8 ein und löst die hierdurch entstehende Gleichung für p auf, so ergiebt sich $p = 1{,}2\ m$, die gesuchte Beschleunigung.

40. Wie lange muss sich ein Punkt bewegen, um bei einer Beschleunigung von *0,01 m*, von einer Anfangsgeschwindigkeit von *4 m* auf eine Endgeschwindigkeit von *16 m* zu gelangen?

Antwort: *20* Minuten lang.

41. Wie viel Zeit braucht ein Punkt, um bei *3 m* Anfangs- und *7 m* Endgeschwindigkeit einen Weg von *4800 m* zurückzulegen?

Antwort: *16* Minuten.

42. Man beobachtet, dass ein von der Ruhelage aus sich bewegender Körper in *15* Sekunden einen Weg von *45 m* zurücklegt. Welches war seine Beschleunigung?

Antwort: $p = 0{,}4\ m$.

43. Welches ist die Geschwindigkeit des Körpers in voriger Aufgabe nach einer weiteren halben Minute?

Antwort: $v = 18\ m$.

44. Auf den höchsten Punkt einer geneigten Ebene von *40 m* Länge legt man eine Kugel, welche nun herabrollt und in *8* Sekunden am Fusse der schiefen Ebene ankommt. Man bestimme hieraus die Beschleunigung und die Endgeschwindigkeit der Bewegung.

Resultate: $p = 1{,}25$ und $v = 10\ m$.

§ 14.

Die gleichförmig verzögerte Bewegung.

Unter einer gleichförmig verzögerten Bewegung versteht man eine solche, bei welcher die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten um gleich viel abnimmt. Die Abnahme der Geschwindigkeit pro Sekunde nennt man die Verzögerung und bezeichnet sie, wie die Beschleunigung, mit p. Ausserdem kommen hier die vier Grössen c, t, v und s genau in derselben Bedeutung vor, wie oben; nur ist im voraus klar, dass hier, im Gegensatze zur beschleunigten Bewegung, die Anfangsgeschwindigkeit c immer grösser sein wird als die Endgeschwindigkeit v.

Weil aber jede Abnahme als eine negative Zunahme und mithin auch die Verzögerung als negative Beschleunigung angesehen werden darf, so ergeben sich die Gesetze für die gleichförmig verzögerte Bewegung, wenn man in den Beziehungen No. 6 und 8 $-p$ an die Stelle von $+p$ setzt, nämlich

$$v = c - p\,t \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

und

$$s = c\,t - \frac{p}{2}t^2 \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

Die Formel 7, in welcher die Grösse p überhaupt nicht vorkommt, gilt natürlich sowohl für die gleichförmig verzögerte, als

auch für die gleichförmig beschleunigte Bewegung. Schliesslich sei noch erwähnt, dass der spezielle Fall $c = 0$ selbstverständlich hier ausgeschlossen ist.

§ 15.

Übungsbeispiele.

45. Die Geschwindigkeit eines Körpers ist anfangs *38 m*, vermindert sich aber aus irgend welcher Ursache per Sekunde um *0,4 m*; wie gross ist die Geschwindigkeit nach einer Minute und welche Wegeslänge wurde in dieser Zeit durchlaufen?

Resultate: $v = 14\,m$ und $s = 1560\,m$.

46. Nach wie viel Sekunden, vom Beginn der Bewegung an gerechnet, kommt dieser Körper zur Ruhe?

Lösung: Letztere tritt in dem Momente ein, wo die Endgeschwindigkeit gleich Null geworden ist. Setzen wir daher in der 12. Formel $c = 38$, $p = 0{,}4$ und $v = 0$, so ergiebt sich

$$0 = 38 - 0{,}4\,t$$

oder

$$t = \frac{38}{0{,}4} = \mathbf{95};$$

die Bewegung hört also nach *95* Sekunden auf.

47. Man will die Geschwindigkeit eines Körpers, welche zu einem gewissen Zeitpunkte *30 m* beträgt, durch allmähliche Verminderung in zwei Minuten auf die Hälfte reduzieren; wie gross muss da die Verzögerung sein?

Auflösung: Man setzt in der 12. Beziehung $c = 30$, $v = 15$, $t = 120$ und erhält

$$15 = 30 - 120\,p,$$

folglich

$$\mathbf{p = 0{,}125\,m},$$

die gesuchte Verzögerung.

48. Eine auf einer Ebene fortrollende Kugel besitzt zuerst eine Geschwindigkeit von *6 m*. Wie lange bewegt sich diese Kugel, wenn ihr die Bewegungshindernisse pro Sekunde *3 cm* an Geschwindigkeit entziehen?

Antwort: *3* Minuten *20* Sekunden lang.

49. Wie weit entfernt sich die Kugel vom Anfangspunkt der Bewegung?

Antwort: *600 m.*

50. Eine Lokomotive hat *15 m* Geschwindigkeit und soll auf *900 m* zum Stillstand gebracht werden. Welche Verzögerung muss ihr durch Bremsen erteilt werden?

Lösung: Hier bestimmen wir zunächst die nötige Bewegungszeit, indem wir in der 7. Formel $s = 900$, $c = 15$ und $v = 0$ substituieren. Aus der hierdurch entstehenden Gleichung

$$900 = \frac{15}{2} t$$

folgt

$$t = 120$$

und mit Einsetzung dieses Wertes und der anderen Zahlen in 13 erhält man

$$900 = 1800 - 7200\, p$$

oder

$$\mathbf{p = 0{,}125\ m,}$$

die gesuchte Verzögerung.

51. Eine Kugel wird mit einer Geschwindigkeit von *9 m* eine schiefe Ebene hinaufgestossen und erreicht nach einer halben Minute die höchste Lage, von wo aus sie wieder umkehrt. Mit welcher Verzögerung bewegte sich die Kugel?

Antwort: $p = 3\ dm$.

52. Wie weit hatte sich die Kugel vom Ausgangspunkt entfernt?

Antwort: *135 m.*

53. Wann hatte sie eine Geschwindigkeit von *4 m*?

Antwort: Nach $16^2/_3$ Sekunden.

§ 16.

Der freie Fall und der senkrechte Wurf der Körper.

Die wichtigsten Anwendungen der letzten beiden Bewegungsarten haben wir im freien Fall und im senkrechten Wurf der Körper.

Wie die Erfahrung lehrt, bewegt sich nämlich ein seiner Unterstützung beraubter Körper bis zum Eintritte irgend eines Hindernisses in gerader, lotrechter Linie gleichförmig beschleunigt. Die Geschwindigkeitszunahme, hier auch die Beschleunigung oder Acceleration der Erdschwere genannt, beträgt nach genauen physikalischen Messungen im luftleeren Raume *9,81 m* und wird allgemein mit g bezeichnet.

Da es nun ausserdem gebräuchlich ist, den nach t Sekunden zurückgelegten Weg, welcher hier Fallhöhe heisst, mit h zu bezeichnen, so erhalten wir zunächst die Formeln für den freien Fall von der Ruhe aus, wenn wir in 10 und 11

$$g = 9{,}81\ m$$

statt p und h an die Stelle von s einsetzen, nämlich

$$v = g\,t, \quad \dots\dots \quad (14)$$

$$h = \frac{g}{2}\,t^2, \quad \dots\dots \quad (15)$$

$$h = \frac{v^2}{2\,g} \quad \dots\dots \quad (16)$$

und hieraus

$$v = \sqrt{2\,g\,h}. \quad \dots\dots \quad (17)$$

Wird dagegen ein Körper mit einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit c vertikal empor geschleudert, so nimmt er eine gleichförmig verzögerte Bewegung an, seine Verzögerung ist $g = 9{,}81\ m$, und wir erhalten nach 12 und 13

$$v = c - g\,t, \quad \dots\dots \quad (18)$$

die Endgeschwindigkeit, sowie

$$h = c\,t - \frac{g}{2}\,t^2, \quad \dots\dots \quad (19)$$

die Wurf- oder Steighöhe des Körpers nach der Zeit t.

Allerdings ist in vorstehenden Angaben der Luftwiderstand gänzlich unberücksichtigt gelassen und zugleich haben die Formeln 14 bis 19 streng genommen nur Giltigkeit für nicht allzugrosse Fallräume; allein die letzteren sind, soweit sie in der Technik vorkommen, so klein und hiermit ist auch der Luftwiderstand so gering, dass bei Anwendung obiger Formeln ein nennenswerter Fehler nicht zu befürchten steht.

§ 17.

Übungsbeispiele.

54. Welche Geschwindigkeit erhält und welche Höhe durchfällt ein Körper vom Ruhezustande aus in *5* Sekunden?

Resultate: $v = 49{,}05$ und $h = 122{,}625\ m$.

55. Wie gross ist die Endgeschwindigkeit eines Körpers, der ohne Anfangsgeschwindigkeit eine Höhe von *20 m* zu durchfallen hat?

Lösung: Aus Formel 17 ergiebt sich $v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 20} = \sqrt{392{,}4} = \mathbf{19{,}81\ m}$.

56. Die Endgeschwindigkeit eines aus *16,5 m* Höhe herabfallenden Körpers anzugeben.

Resultat: $v = 17{,}993$, als circa *18 m*.

57. Ein Dampfhammer wird *1,05 m* hoch gehoben und fällt dann frei herunter; mit welcher Geschwindigkeit trifft er das zu schmiedende Eisenstück?

Antwort: Mit einer Geschwindigkeit von *4,54 m*.

58. Welche Höhe hat ein mit *23,5 m* Geschwindigkeit ankommender Körper durchfallen?

Lösung: Für $v = 23{,}5$ ergiebt sich aus Formel 16 die gesuchte Fallhöhe $h = 28{,}15\ m$.

59. Ein Körper wird mit einer Geschwindigkeit von *196,2 m* senkrecht emporgeschleudert. Wie gross ist seine Geschwindigkeit nach *15* Sekunden?

Antwort: $v = c - g\,t = 196{,}2 - 9{,}81 \cdot 15 = 49{,}05\ m$.

60. Wie hoch ist der Körper in dieser Zeit gestiegen?

Antwort: *1839,4 m* hoch.

61. Wie lange steigt der Körper überhaupt, d. h., wann erreicht er seinen höchsten Punkt, um dann umzukehren?

Lösung: Offenbar in dem Momente, wo seine Endgeschwindigkeit Null ist. Setzt man aber in der 18. Formel $v = 0$, $c = 196{,}2$ und $g = 9{,}81$, so entsteht

$$0 = 196{,}2 - 9{,}81\,t$$

und hieraus folgt $t = 20$; folglich steigt der Körper *20* Sekunden lang.

62. Bis zu welcher Höhe hatte sich demnach der Körper erhoben?

Antwort: Bis zu *1962 m.*

63. Ein Körper wurde vertikal emporgeschleudert und kam nach *50* Sekunden an die Ausgangsstelle zurück. Wie gross berechnet sich hieraus mit Vernachlässigung des Luftwiderstandes die Anfangsgeschwindigkeit?

Antwort: *245,25 m.*

Zweites Kapitel.

Die beiden ersten Grundgesetze der Mechanik.

Begriff und Leistung einer Kraft.

§ 18.

Das Grundgesetz vom Beharrungsvermögen.

Wie z. B. die Mathematik, so geht auch die theoretische Mechanik von gewissen Annahmen aus, die unmittelbar der Erfahrung entnommen sind und welche nun die Fundamentsteine für das Lehrgebäude der Mechanik abgeben. Diese Annahmen heissen die Grundsätze oder Axiome der Mechanik und ihre Richtigkeit wird nachträglich noch dadurch bestätigt, dass keine aus ihnen gezogene Folgerung den in der Natur beobachteten Thatsachen widerstreitet.

Von den vier Axiomen, welche der Mechanik im ganzen zu Grunde liegen, nennen wir als erstes das Grundgesetz vom Beharrungsvermögen oder von der Trägheit, nach welchem ohne äussere Veranlassung ein Körper weder den Zustand der Ruhe noch seine Bewegung irgend wie ändert: ist ein Körper einmal in Ruhe, so hat er auch das Bestreben, darin zu verharren, und ein bewegter Körper würde unaufhörlich eine gleichmässige Bewegung in gerader Linie verfolgen, wenn eben nicht äussere Ursachen vorhanden wären, welche entweder seine Geschwindigkeit oder seine Richtung oder beides zugleich abänderten.

Dass der erste Teil dieses Gesetzes richtig ist, dürfte ohne weiteres einleuchten; denn es bedarf z. B. für einen Menschen immer einer gewissen Anstrengung, um seinen oder einen anderen Körper in Bewegung zu setzen; für die Wahrheit des zweiten Teiles sprechen wohl auch viele Erscheinungen, so zum Beispiel, dass man beim scharfen Laufen nicht plötzlich einhalten kann, oder dass das Schwungrad einer Maschine noch fortläuft, nachdem der Dampfdruck bereits geraume Zeit zu wirken aufgehört hat u. s. w.; allein die letzte Konsequenz des oben angeführten Satzes zu beobachten sind wir niemals in der Lage, weil es keine einzige geradlinige und gleichförmige Bewegung von unbeschränkter Dauer giebt. Man muss daher den Scharfsinn bewundern, mit welchem der Italiener Galilei das Trägheitsgesetz zuerst richtig erkannt hat.

§ 19.

Entwickelung des Begriffes „Kraft".

Die im vorigen Paragraphen mehrfach erwähnten Ursachen, dass das Axiom vom Beharrungsvermögen nicht zum direkten und vollen Ausdrucke gelangt, bezeichnet man mit dem gemeinschaftlichen Namen „Kräfte". Unter einer Kraft versteht man demnach alles dasjenige, was eine Bewegung hervorzurufen oder auch eine bereits bestehende Bewegung (in Bezug auf Richtung und Geschwindigkeit) abzuändern imstande ist.

Wenn wir z. B. beobachten, dass die Geschwindigkeit eines lotrecht empor geworfenen Körpers beständig abnimmt, bis sie gleich Null geworden ist — und dass dann der Körper in beschleunigter Bewegung zur Erde zurückkehrt, so muss notwendiger Weise eine Ursache angenommen werden, welche diese Geschwindigkeitsänderungen bewirkt; man nennt dieselbe bezeichnend Anziehungskraft der Erde oder auch Schwerkraft.

Wird ferner ein Körper auf einer horizontalen Ebene mit einer bestimmten Geschwindigkeit fortgestossen, so ist zwar die Schwerkraft aufgehoben und kann demgemäss eine Bewegungsänderung unmittelbar nicht hervorrufen; allein sie bewirkt doch einen Druck zwischen dem Körper und seiner Unterlage und hierdurch entsteht ein Bewegungswiderstand, welchen wir

später unter dem Namen Reibung kennen lernen werden und welcher die nächste Ursache ist, dass auch die Bewegung eines auf horizontaler Bahn fortgeschleuderten Körpers eine verzögerte ist und folglich nach einer gewissen Zeit ganz aufhört.

Aber selbst wenn auch die Reibung vollständig beseitigt werden könnte, so bliebe doch immer noch der Luftwiderstand, welcher dem Körper in jeder Sekunde ebenfalls einen, wenn auch kleinen Teil seiner Geschwindigkeit entziehen und ihn demnach schliesslich zum Stillstand bringen würde.

Das führt zu der weiteren Frage, ob es nicht doch Körper giebt, welche weder von der Reibung, noch vom Luftwiderstande hemmend beeinflusst werden, und da dies mit voller Gewissheit von allen Himmelskörpern, also beispielsweise auch von unserer eigenen Erde behauptet werden kann, so kommt es darauf an, wie es sich mit deren Bewegungen verhält. Die Erfahrung lehrt nun, dass sich zwar alle Himmelskörper seit erdenklichen Zeiten bewegen und auch keine bleibende Geschwindigkeitseinbusse erlitten haben, dass dagegen eine ununterbrochene Änderung ihrer Richtung erfolgt, indem die Bahnen ihrer Mittelpunkte sämtlich krumme Linien sind.

Als Ursache für den letzteren Umstand muss auch hier eine Kraft gelten, nämlich diejenige Kraft, mit welcher irgend zwei Körper bestrebt sind, sich einander zu nähern und welcher man den Namen Gravitation beigelegt hat.

Es wird jetzt auch klar sein, warum niemals eine unmittelbare und alleinige Wirkung des Beharrungsvermögens beobachtet werden kann — weil es nämlich unmöglich ist, einen Körper der Einwirkung jeglicher Kraft zu entziehen.

§ 20.

Einteilung der Kräfte.

Die Ausführungen des vorigen Paragraphen lassen erkennen, dass die Kräfte zerfallen in solche, welche selbständig Bewegung zu erzeugen imstande sind, wie z. B. die Schwerkraft, und in solche, welche keine Bewegung hervorbringen, sondern nur bereits bestehende Bewegung verhindern oder abändern können, wie z. B. die Reibung und der Luftwiderstand.

Bewegende Kräfte sind ausser der Schwerkraft:

1. Das Beharrungsvermögen bewegter Körper, nach welchem beispielsweise ein abgestossener Billardball einen anderen ruhenden in Bewegung bringt.

2. Die Wärmekraft, vermöge welcher die Körper bei Temperaturwechsel sich ausdehnen oder zusammenziehen.

3. Der Magnetismus oder die Kraft, mit welcher sich zwei Magnete anziehen oder abstossen.

4. Die Elastizität oder Federkraft, welche hervortritt, wenn die Form oder das Volumen eines festen Körpers geändert wird.

5. Die Muskelkraft der Menschen und Tiere etc.

Von den Kräften der zweiten Art, welche auch hemmende Kräfte oder Widerstände heissen, nennen wir:

1. Die Trägheit ruhender Körper, nach welcher die Bewegung eines Körpers verzögert, resp. aufgehoben wird, wenn derselbe auf einen ruhenden Körper trifft.

2. Die Kohäsionskraft, das ist die Ursache, welche die Teilchen eines festen Körpers zusammenhält, sodass letztere einer Trennung widerstreben.

3. Die Adhäsionskraft, mit welcher zwei verschiedene, in innige Berührung gebrachte Körper aneinander haften (z. B. zwei eben geschliffene und glatt polierte Glasplatten).

Übrigens kann jede bewegende Kraft offenbar auch als Widerstand auftreten, nämlich dann, wenn sie der Bewegung eines Körpers entgegenwirkt.

Früher teilte man die Kräfte ausserdem noch ein in stetig oder dauernd und in momentan (augenblicklich) wirkende Kräfte; allein genaue Untersuchungen neuerer Zeit haben ergeben, dass es Kräfte der letzteren Art überhaupt gar nicht giebt. Jede Kraft braucht eine bestimmte, wenn auch oft sehr kurze Zeit, um einem Körper eine gewisse Geschwindigkeit zu erteilen; jede Bewegung von der Ruhe aus ist also anfangs immer beschleunigt.

§ 21.

Bestimmungsstücke einer Kraft.

Mit dem Begriffe „Kraft“ sind folgende drei charakteristische Merkmale verbunden:

1. Der Angriffspunkt, d. i. die Stelle eines Körpers, auf welche die Kraft unmittelbar wirkt.

2. Die Richtung, d. i. die gerade Linie, in welcher die Kraft den Angriffspunkt wirklich fortbewegt oder doch fortzubewegen sucht oder endlich auch, dessen Bewegung zu hindern bestrebt ist.

3. Die Grösse oder die Intensität der Kraft, d. i. das Mass für ihre Wirkungsfähigkeit. Wie bereits bemerkt, besteht die sichtbare Wirkung jeder Kraft in Bewegung, resp. Bewegungsänderung. Ist aber das Eintreten der Bewegung eines Körpers dadurch verhindert, dass der Angriffspunkt der Kraft durch einen zweiten unbeweglichen Körper gestützt wird, so äussert sich die Wirkung der ersteren durch einen Druck auf den letzteren, und man kann daher die Kräfte messen, indem man die Drücke vergleicht, welche sie gegen feststehende Körper ausüben.

Weil man aber insbesondere den Druck, welchen ein bestimmter irdischer Körper vermöge der Schwerkraft auf seine Unterlage ausübt, das Gewicht dieses Körpers nennt, so können auch alle Drücke und demnach auch alle Kräfte nach Gewichten gemessen werden, es handelt sich nur noch darum, eine passende Gewichtseinheit festzustellen. Damit die Gewichts- und die Raummasse in genauem Zusammenhange stehen, hat man als solche das Gewicht eines Liters destillierten Wassers bei 4° C. gewählt, demselben den Namen Kilogramm und die Abkürzungsbezeichnung *kg* beigelegt.

Wir werden also im folgenden alle Kräfte durch das Kilogramm messen, ganz gleichgiltig, welcher Art diese Kräfte seien, ob sie sich nun durch den Druck von Wasser oder Dampf, durch die Muskelthätigkeit von Menschen oder Tieren, durch die Trägheit bewegter oder ruhender Körper, ob sie sich in der Reibung, im Luftwiderstande etc. äussern.

§ 22.

Das Grundgesetz der Wechselwirkung.

Das zweite Axiom der Mechanik besagt, dass die Kräfte nie einzeln, sondern immer nur paarweise in der Natur auf-

treten und zwar derartig, dass die beiden Kräfte einander gleich sind und in derselben geraden Linie nach entgegengesetzten Seiten wirken.

Der Druck, welchen ein Körper vermöge seines Gewichtes auf eine horizontale Ebene ausübt, ruft einen genau eben so grossen vertikalen Gegendruck hervor; ein an einem Faden hängender Körper erzeugt in ersterem eine Spannung, welche dem Gewichte des Körpers gleich, aber entgegengesetzt gerichtet ist; der Mond zieht die Erde mit derselben Stärke an, wie diese jenen; das Abstossen zweier Magnete ist ein vollkommen gegenseitiges; wenn ein Mensch einen Gegenstand senkrecht aufheben will, so sucht letzterer den ersteren in gleichem Masse lotrecht abwärts zu ziehen u. s. w. u. s. w.

Man könnte dieses Gesetz etwas kürzer auch so ausdrücken: Jede Kraftwirkung erzeugt eine gleich grosse Gegenwirkung, welche der ersteren diametral entgegengesetzt ist.

§ 23.
Mechanische Arbeit.

Jede Kraft, welche einen Körper bewegt, hat Widerstände zu überwinden: beim Heben von Lasten auf gewisse Höhen das Gewicht der ersteren; während des Transportes von Gegenständen auf horizontaler Bahn mittels irgend welcher Fahrzeuge die Reibung; behufs Zersägens von Holz die Kohäsion; bei dem Werfen eines Steines ausser seinem Gewichte den Luftwiderstand und die Trägheit, letztere wenigstens so lange, als die Hand mit dem Steine in Berührung bleibt u. s. f.

Diese Überwindung eines Widerstandes auf bestimmter Wegstrecke, welche Leistung der Kraft oder auch mechanische Arbeit heisst, ist bei immer gleichem Widerstande einerseits dem letzteren selbst, andererseits aber auch dem vom Angriffspunkte der Kraft durchlaufenen Weg, mithin dem Produkte aus Widerstand und Weg proportional; denn es bedarf beispielsweise einer dreifachen Anstrengung: sowohl wenn die dreifache Last auf dieselbe Höhe — als auch, wenn die einfache Last auf eine dreimal so grosse Höhe gehoben werden soll, und es

entspricht einer achtfachen Leistung, ob man nun eine achtfache Last auf die einfache, oder eine vierfache Last auf die doppelte oder aber die einfache Last auf die achtfache Höhe hebt etc.

Bedient man sich nun, wie bisher, des Meters als Weg- und des Kilogramms als Kraft-, resp. Widerstandseinheit, so ergiebt sich ganz naturgemäss als Arbeitseinheit diejenige mechanische Arbeit, welche bei Überwindung des Widerstandes von einem Kilogramm auf der Wegstrecke von einem Meter verrichtet wird; diese Einheit der mechanischen Arbeit nennt man Kilogrammmeter oder auch Meterkilogramm und bezeichnet sie zur Abkürzung mit *mkg*. Wenn z. B. *13 kg* Widerstand *6 m* weit überwunden wird, so ist die geleistete Arbeit *13* mal *6* gleich *78 mkg*, folglich *78* mal so gross, als wenn der Widerstand ein Kilogramm und der Weg ein Meter gewesen wäre, oder, was auf dasselbe hinauskommt, als wenn ein Kilogrammstück einen Meter hoch gehoben würde.

Verallgemeinern wir das Gesagte, so ergiebt sich die mechanische Arbeit A, welche zur Überwindung eines Widerstandes von W Kilogrammen längs einer Wegstrecke von s Metern nötig ist, durch die Formel

$$A = W \cdot s \quad \cdots\cdots \quad (20)$$

und zwar in Meterkilogrammen.

Unter der Bedingung, dass die bewegende Kraft P in der Richtung des Widerstandes (aber selbstredend entgegengesetzt) wirkt, ist übrigens nach dem im vorigen Paragraphen ausgesprochenen Grundgesetz der Wechselwirkung die erstere dem letzteren gleich, also

$$P = W,$$

und man kann daher in diesem Falle für den zu überwindenden Widerstand immer auch die arbeitende Kraft, folglich

$$A = P \cdot s \quad \cdots\cdots \quad (21)$$

setzen; wie sich aber die Sache gestaltet, wenn die Kraftrichtung mit der Wirkungslinie des Widerstandes einen Winkel einschliesst, soll an späterer Stelle gezeigt werden.

Hier mache man sich aber noch den Unterschied zwischen den beiden Begriffen „Kraft“ und „mechanische Arbeit“, welche von Anfängern nicht selten verwechselt werden, vollkommen klar: Kraft ist die Ursache, mechanische Arbeit die, jedoch nicht

gerade notwendige Wirkung; die Kraft macht nur einen Faktor der mechanischen Arbeit aus, der andere Faktor ist der vom Angriffspunkte der Kraft durchlaufene Weg. Eine Kraft kann also nur dann Arbeit erzeugen, wenn sie den von ihr beeinflussten Körper wirklich zu bewegen imstande ist, während sie sich im anderen Falle lediglich als Druck oder Zug äussert.

§ 24.

Übungsbeispiele.

64. Welcher mechanischen Arbeit bedarf es, um einen *85 kg* schweren Rammklotz *1,8 m* hoch zu heben?

Antwort: *153 mkg.*

65. Wie viel mechanische Arbeit ist nötig, um einen Hammer von *45 kg* Gewicht *60 cm* hoch zu heben?

Antwort: *27 mkg.*

66. Ein Arbeiter trägt auf einer Laufbrücke *28* Ziegelsteine, von welchen jeder *3,5 kg* wiegt, circa *6 m* hoch. Wie gross ist die hierbei geleistete Arbeit, wenn das eigene Gewicht des Mannes *75 kg* beträgt?

Antwort: *1038 mkg.*

67. Welche mechanische Arbeit wäre aber bloss erforderlich, wenn die Last direkt an einem Seile emporgezogen würde?

Antwort: *588 mkg.*

68. Zwei Arbeiter schaffen Getreidesäcke, von welchen jeder *57 kg* wiegt, in die oberen Etagen eines Magazins, und zwar trägt der eine *85* Säcke *9 m* und der andere *102* Säcke *6 m* hoch. Welches sind die von beiden verrichteten nützlichen mechanischen Arbeiten (d. h. ohne Berücksichtigung der Eigengewichte) und wie verhalten sie sich?

Resultate: $A_1 = 43605\ mkg$, $A_2 = 34884\ mkg$, $A_1 : A_2 = 5 : 4$.

69. Man bestimme die Arbeit, welche ein Spaziergänger während eines *7500 m* langen und horizontal verlaufenden Weges verrichtet unter der Annahme, dass sich sein *65 kg* wiegender Körper bei jedem *75 cm* langen Schritte um *24 mm* hebt.

Resultat: *15600 mkg.*

70. Welche Arbeit leistet ein Infanterist, welcher selbst *72 kg* und dessen gesamtes Gepäck *23 kg* wiegt, per Minute, wenn er in der letzteren *110* Schritte macht und seinen Körper bei jedem Schritte um *3 cm* hebt?

Antwort: *313,5 mkg.*

71. Wie viel Arbeit würde aber dieser Mann in der Minute produzieren müssen, wenn er bei Besteigung einer Anhöhe seinen Körper per Schritt um *16 cm* heben müsste, auch wenn er pro Minute nur *100* Schritte macht?

Antwort: *1520 mkg.*

72. Der Gesamtwiderstand eines Fuhrwerks auf horizontaler, guter Chaussee kann zu einem Dreissigstel der Belastung angenommen werden. Welche mechanische Arbeit ist erforderlich, um einen *4500 kg* schweren Frachtwagen einen Meter weiter zu bewegen?

Antwort: *150 mkg.*

§ 25.

Krafteffekt. Pferdestärke.

In den Formeln 20 und 21 für die mechanische Arbeit A treten lediglich die Kraft P, resp. der Widerstand W, und der Weg s auf, dagegen kommt die Zeit, während welcher die Arbeit erfolgt, gar nicht in Betracht. Es folgt hieraus, dass die mechanische Arbeit als solche von der Zeit ganz unabhängig ist, und in der That bleibt ja eine Arbeit offenbar dieselbe, ob sie nun in längerer oder kürzerer Zeit ausgeführt wird.

Wenn es sich aber, wie im gewerblichen Leben so häufig, darum handelt, die Leistungen von Kräften unter einander zu vergleichen, so muss man die mechanischen Arbeiten bestimmen, welche jene Kräfte innerhalb derselben Zeit verrichten. Gewöhnlich nimmt man als Zeitraum die Sekunde an und nennt diejenige Arbeit welche eine Kraft per Sekunde hervorbringt, den Effekt der Kraft.

Wirft z. B. ein Arbeiter stündlich *5* Kubikmeter Erde vom spezifischen Gewichte *1,8* auf eine durchschnittliche Höhe von *1,6* Metern, so ist die zu bewältigende Last $5 \cdot 1800\ kg$, die Hubhöhe *1,6 m*, mithin die

mechanische Arbeit pro Stunde $5 \cdot 1800 \cdot 1{,}6$ *mkg* und folglich die Arbeit pro Sekunde

$$\frac{5 \cdot 1800 \cdot 1{,}6}{3600} = 4 \; mkg;$$

der Mann wendet demnach einen Krafteffekt von *4* Meterkilogrammen auf.

Bei Ausnützung der Naturkräfte durch Maschinen ergeben sich jedoch häufig so bedeutende Effekte, dass bei Zugrundelegung des Meterkilogramms Zahlen zu Stande kommen, welche wegen ihrer Höhe unbequem sind. Dies ist der Grund, warum man eine grössere Arbeitseinheit eingeführt hat, nämlich die sogenannte Maschinen-Pferdekraft, worunter der Effekt oder die sekundliche mechanische Arbeit von *75* Meterkilogrammen zu verstehen ist. Schon aus dieser Erklärung geht hervor, dass der Name „Pferdekraft" wenig sachgemäss erscheint, da ja, wie schon erwähnt, „Kraft" und „Arbeit" zwei wesentlich verschiedene Dinge sind. Weit besser bezeichnend würden allerdings die Worte „Pferdeleistung" oder „Pferdearbeit" sein; allein da diese Benennungen von Niemandem gebraucht werden, so entscheiden wir uns für den öfter vorkommenden und weniger verfänglichen Namen „Pferdestärke" und bezeichnen letztere zur Abkürzung mit PS. Nur nebenbei sei hier noch erwähnt, dass ein mittelstarkes animalisches Pferd bei angestrengter Thätigkeit und täglich achtstündiger Arbeitszeit einen Effekt von etwa *50* Meterkilogrammen auszuüben imstande ist, sodass die durchschnittliche Leistung eines gewöhnlichen Pferdes nur etwa $\frac{2}{3}$ einer Maschinen-Pferdestärke beträgt, ganz abgesehen davon, dass ersteres eben nur einen Teil des Tages zu arbeiten vermag.

Nach obiger Definition ergiebt sich nun die Anzahl der Pferdestärken, mit welchen irgend eine Kraft wirkt, einfach dadurch, dass der in Meterkilogrammen ausgedrückte Effekt der letzteren durch *75* dividiert wird; diese Pferdestärkenzahl wollen wir immer mit N bezeichnen.

Sollen z. B. mittels eines Pumpwerkes in der Minute *2700* Liter Wasser *15* Meter hoch gehoben werden, so erfordert dies einen Krafteffekt

$$E = \frac{2700 \cdot 15}{60} = 675 \; mkg$$

und mithin ist die Anzahl der nötigen Pferdestärken

$$N = \frac{675}{75} = 9.$$

Hierbei, sowie auch in den folgenden Beispielen sind jedoch die Reibung und sonstigen Bewegungshindernisse vorläufig ausser Acht gelassen.

§ 26.

Übungsbeispiele.

73. Welchen Effekt liefert der in Beispiel 70 angeführte Soldat?

Antwort: *5,225 mkg.*

74. Desgleichen der Infanterist im 71. Beispiel?

Antwort: *25,333 mkg.*

75. Ebenso der Spaziergänger in Beispiel No. 69 unter der Bedingung, dass er zu seinem Spaziergange *2* Stunden und *10* Minuten gebraucht?

Antwort: *2 mkg.*

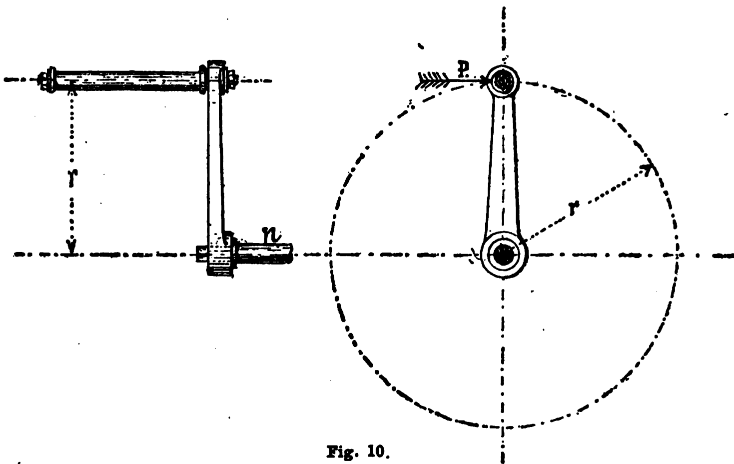


Fig. 10.

76. Wie gross ist der Effekt eines Mannes, der auf den Griff einer Kurbel (Fig. 10) von r Meter Länge einen fortwährenden Druck von P Kilogrammen ausübt und die Kurbel in der Minute n mal umdreht?

Auflösung: Mit Benutzung von Formel 2 erhält man leicht

$$E = P\,c = \frac{r\,\pi\,n}{30}\,P = 0{,}1047\ r\ n\ P \text{ Meterkilogramm.}$$

77. Man löse die vorige Aufgabe für die speziellen Zahlenwerte $r = 40\ cm$, $n = 18$ und $P = 7\ kg$.

Resultat: Circa *5,28 mkg.*

78. Der Klotz einer Ramme wiegt *450 kg* und soll in der Minute *16* mal auf eine Höhe von *1,4* Meter gehoben werden. Wie viel Arbeiter sind hierzu erforderlich, wenn man von jedem einen Effekt von *7* Meterkilogrammen verlangen kann?

Antwort: *24* Mann.

79. Wie viel Pferdestärken müsste zu diesem Zwecke eine Dampfmaschine entwickeln?

Antwort: *2,24* PS.

80. Wie viel Pferdestärken sind zum Betriebe eines Pochwerkes, welches m Stempel besitzt, notwendig, wenn jeder Stempel k Kilogramm wiegt und in jeder Minute n mal auf h Meter Höhe gehoben wird?

Auflösung: Es ist das Gesamtgewicht der Stempel mk Kilogramm, die Hubhöhe h Meter, folglich die mechanische Arbeit bei jedem Hub $m\,h\,k$ Meterkilogramme, die Arbeit pro Minute $m\,n\,h\,k$, pro Sekunde $\frac{m\,n\,h\,k}{60}$ Meterkilogramme, oder in Pferdestärken

$$N = \frac{m\,n\,h\,k}{60 \cdot 75}.$$

81. Wie gestaltet sich das Resultat des letzten Beispiels für die speziellen Angaben $m = 24$, $k = 90\ kg$, $n = 7$ und $h = 50\ cm$?

Antwort: $N = 1{,}68$.

82. Wie viel Pferdestärken sind zum Betriebe einer Dampfspritze, welche per Sekunde *36* Liter Wasser *25* Meter hoch werfen soll, erforderlich, wenn die Reibungsverluste unberücksichtigt gelassen werden?

Antwort: $N = 12$.

83. Welche mechanische Arbeit in Pferdestärken muss eine Dampfmaschine liefern, um per Stunde *120* Kubikmeter Wasser auf eine Höhe von *15* Metern zu befördern?

Antwort: $N = 6{,}666 \cdots$

84. An einem kleinen Wasserfalle stürzen per Minute *15* Kubikmeter Wasser *9* Meter hoch herab. Wie viel Pferdestärken gehen hier verloren?

Antwort: *30* PS.

85. Ein Fluss liefert an einer gewissen Stelle selbst in der trockensten Zeit noch ein Wasserquantum von *2* Kubikmeter pro Sekunde. Auf wie viel Pferdestärken kann demnach bei einem Gefälle von *3* Metern unter allen Umständen gerechnet werden?

Antwort: Auf *80* PS.

86. Welche mechanische Arbeit in Pferdestärken muss eine Lokomotive bei *6* Meter Geschwindigkeit entwickeln, wenn die Last des ganzen Zuges *300000* Kilogramm beträgt, und die Gesamtwiderstände gegen die Bewegung zu $\frac{1}{200}$ der Belastung angenommen werden?

Lösung: Es ist der zu überwindende Totalwiderstand

$$= \frac{300000}{200} = 1500\ kg,$$

mithin die Arbeit in der Sekunde

$$= 1500 \cdot 6 = 9000\ mkg = \frac{9000}{75} = \mathbf{120\ PS.}$$

§ 27.

Mechanische Arbeit durch Maschinen. Wirkungsgrad.

Maschinen sind im allgemeinen Vorrichtungen zur Übertragung der Wirkung von Kräften von einem Körper auf den andern, und man bedient sich derselben, um gegebene Kräfte zur Verrichtung gewisser Arbeiten zu verwenden, wozu sich diese Kräfte unmittelbar nicht eignen würden. So können zum Beispiel die Kräfte des Windes, des Wassers oder des Dampfes nur unter Vermittelung von Mahl-, resp. Schneidemühlen dazu benützt werden, Getreide in Mehl zu verwandeln, resp. Baumstämme in Bretter zu zersägen etc. etc.

Die mechanische Arbeit, welche eine Kraft in einer bestimmten Zeit zu leisten fähig ist, kann jedoch durch eine Maschine nie vollständig nutzbar gemacht werden, weil häufig direkte Kraft-

und Wegverluste stattfinden, immer aber Bewegungshindernisse auftreten, welche einen gewissen Teil jener mechanischen Arbeit absorbieren.

Sinkt z. B. an irgend einer Stelle eines Baches in jeder Sekunde $^1/_4$ Kubikmeter Wasser *6* Meter tief herab, so ist in dieser fliessenden Wassermenge allerdings ein Krafteffekt von

$$250 \cdot 6 = 1500 \, mkg = \frac{1500}{75} = 20 \, PS$$

enthalten, allein derselbe könnte vermittelst eines Wasserrades nur teilweise auf die Welle des letzteren übertragen werden. Zunächst entsteht nämlich ein direkter Kraftverlust dadurch, dass ein gewisses Wasserquantum zwischen Rad und Gerinne sich bewegt, ohne auf die Schaufeln des Rades zu drücken, folglich auch ohne zu arbeiten; ferner hat ein Wegverlust seine Ursache in dem Umstande, dass das Gefälle behufs Vermeidung von Stauwasser nicht ganz ausgenützt werden darf, und endlich haben wir Bewegungshindernisse in der Zapfenreibung, in der Adhäsion, vermöge welcher durch das Rad Wasserpartikelchen emporgeschleudert werden, dann in Stössen u. s. w. zu suchen. Aus alledem geht hervor, dass die sich drehende Welle wesentlich weniger als *20* Pferdekräfte zu produzieren imstande sein wird.

Man nennt nun die einer bewegenden Kraft innewohnende mechanische Arbeit die theoretische oder Totalarbeit, denjenigen Teil davon, welcher nach obigem in Kraft-, resp. Wegverlusten bestehen kann und durch Bewegungshindernisse konsumiert wird, die Nebenarbeit und endlich die Differenz beider, also diejenige Arbeit, welche von der Maschine wirklich übertragen wird, die effektive oder Nutzarbeit. Es besteht demnach die Gleichung

Totalarbeit = Nebenarbeit + Nutzarbeit,

und es erhellt hieraus einerseits, dass die Nutzarbeit immer kleiner ist als die Totalarbeit und andererseits, dass aus zwei gegebenen die dritte dieser mechanischen Arbeiten durch einfache Addition oder Subtraktion berechnet werden kann. Es versteht sich wohl von selbst, dass die obige Gleichung nur gilt, wenn die Total-, die Neben- und die Nutzarbeit für dieselbe Zeit verstanden sind; nur sei noch bemerkt, dass speziell in Beziehung auf die Sekunde die erste und die letzte auch noch die Namen absoluter und relativer Effekt führen.

Weiterhin ist klar, dass eine Maschine um so leistungsfähiger und infolgedessen um so wertvoller ist, in einem je grösseren

Verhältnisse die Nutzarbeit zur Totalarbeit steht, und man hat daher dieses Verhältnis zur Beurteilung der Güte einer Maschine unter dem Namen Wirkungsgrad in die Technik eingeführt. Aus der Definitionsgleichung

$$\textit{Wirkungsgrad} = \frac{\textit{Nutzarbeit}}{\textit{Totalarbeit}}$$

folgt, zum Teil in Verbindung mit obigem, sofort dreierlei: 1., der Wirkungsgrad ist stets ein echter Bruch, also kleiner als eins; 2., eine Maschine ist um so vollkommener, je näher ihr Wirkungsgrad an der Einheit liegt und 3., kennt man die Totalarbeit und den Wirkungsgrad, so ergiebt sich die

$$\textit{Nutzarbeit} = \textit{Wirkungsgrad} \times \textit{Totalarbeit}.$$

So liefert beispielsweise eine Maschine, deren Wirkungsgrad $\frac{3}{5}$ ist, bei einer Totalarbeit von 25 Pferdestärken eine effektive Arbeit von

$$\frac{3}{5} \cdot 25 = 15\ PS.$$

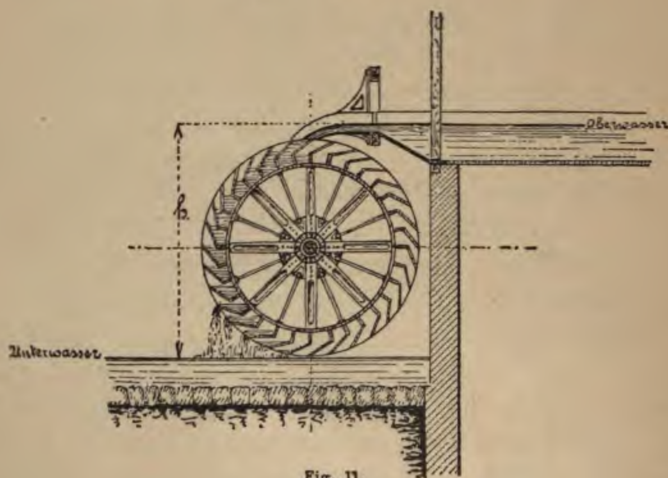


Fig. 11.

§ 28.

Bestimmung der Effekte bei Wasserrädern, Turbinen und Dampfmaschinen.

Der absolute Effekt eines fliessenden Gewässers, welches an einer bestimmten Stelle ein Wasserrad (Fig. 11) oder eine

Turbine (Fig. 12) treiben soll, lässt sich leicht aus der per Sekunde zufliessenden Wassermenge, dem sogenannten Aufschlagwasser und dem Höhenunterschiede zwischen den beiden Wasserspiegeln vor und nach dem Rade, welcher das Gefälle genannt wird, berechnen. Beträgt nämlich das erstere Q Liter und das letztere h Meter, so ist die sekundliche Totalarbeit des Wassers $Q\,h$ Meterkilogramme oder in Pferdestärken

$$N = \frac{Q\,h}{75}.$$

Was die Dampfmaschinen anlangt, so beschränken wir uns hier auf solche, welche ohne Expansion und doppelt wirken, bei welchen der Dampf mit immer gleicher Stärke

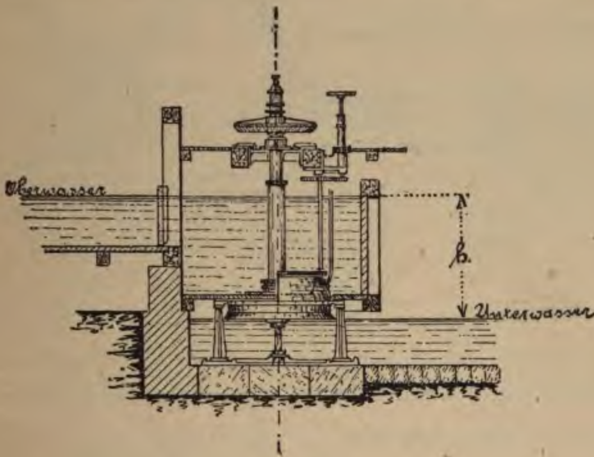


Fig. 12.

und abwechselnd gegen beide Seiten des Kolbens drückt; auch in diesem Falle bestimmen wir naturgemäss zunächst die Intensität der bewegenden Kraft in Kilogrammen, hierauf den vom Angriffspunkte der letzteren per Sekunde durchlaufenen Weg in Metern und erhalten sodann den Effekt der Kraft durch Multiplikation beider Resultate und zwar in Meterkilogrammen.

Hat der Dampf im Cylinder (Fig. 13) einen Überdruck von p Atmosphären, d. h. drückt er mit circa p Kilogrammen auf jeden Quadratcentimeter der Kolbenfläche, so ist, wenn

der Kolbendurchmesser d Centimeter beträgt, der arbeitende Gesamtdruck auf den Kolben

$$P = \frac{d^2 \pi p}{4} \text{ Kilogramm.}$$

Bezeichnet ferner l die Länge des Kolbenhubes in Metern und n die Tourenzahl des Schwungrades, so ist, weil der Kolben bei jeder Umdrehung des letzteren zwei Spiele macht, der Kolbenweg pro Minute $2\,l\,n$ und folglich pro Sekunde

$$c = \frac{l\,n}{30} \text{ Meter.}$$

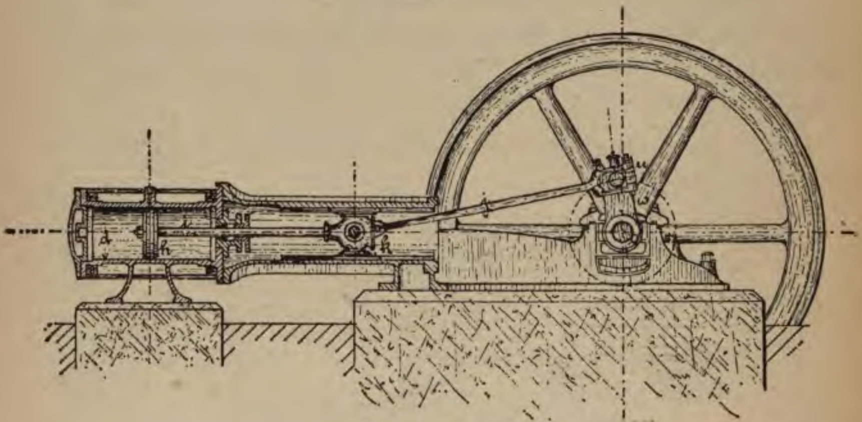


Fig. 13.

Hieraus ergiebt sich weiter der absolute Effekt des Dampfes

$$E = P\,c = \frac{d^2 \pi\, p\, l\, n}{120} \text{ Meterkilogramme,}$$

oder in Pferdestärken

$$N = \frac{E}{75} = \frac{d^2\, l\, n\, p\, \pi}{9000}.$$

So erhalten wir z. B. die Totalarbeit einer Dampfmaschine ohne Expansion, deren Kolben $40\,cm$ Durchmesser, sowie $75\,cm$ Hub hat, deren Schwungrad 36 Umdrehungen per Minute macht und welche mit 4 Atmosphären Überdruck arbeitet, einfach dadurch, dass wir in letzter Formel

$$d = 40,\ l = 0{,}75,\ n = 36 \text{ und } p = 4$$

setzen, nämlich

$$N = 60{,}3$$

Pferdestärken in der Sekunde.

Hat man aber auf diese Weise die theoretische Arbeit berechnet, und es ist ausserdem der Wirkungsgrad einer Maschine bekannt, so erhält man, wie schon am Schlusse des vorigen Paragraphen erörtert, die Nutzarbeit der letzteren durch Multiplikation der beiden ersten.

Wäre z. B. der Wirkungsgrad der Dampfmaschine im vorigen Beispiel *0,67*, so würde sich der Nutzeffekt gleich

$$0{,}67 \cdot 60{,}3 = 40{,}2 \ PS$$

ergeben.

Mittels zahlreicher Versuche und genauer Messungen, welche an späterer Stelle beschrieben und erklärt werden sollen, hat man nun den Wirkungsgrad für die verschiedenartigen Kraftmaschinen festgestellt und Resultate erlangt, welche durch die Theorie vollkommen bestätigt wurden.

Unter Voraussetzung guter Konstruktion und Ausführung ist der Wirkungsgrad

1.	für unterschlächtige Wasserräder . .	*0,3*	bis	*0,4*,
2.	„ mittelschlächtige „ . .	*0,5*	„	*0,6*.
3.	„ oberschlächtige „ . .	*0,6*	„	*0,7*,
4.	„ Turbinen	*0,65*	„	*0,75*,
5.	„ kleine Dampfmaschinen	*0,5*,		
6.	„ mittlere „	*0,6*,		
7.	„ grosse „	*0,7*.		

Der Konsum an Steinkohlen beträgt bei Dampfmaschinen ohne Expansion pro Pferdestärke und Stunde *2* bis *3* Kilogramm.

Weil die vorstehenden Zahlen nur allgemeine Durchschnittswerte sind, so liegt es auf der Hand, dass ihre Anwendung auf einen besonderen Fall nur die Bedeutung einer schätzungsweisen Bestimmung der Nutzarbeit haben kann.

§ 29.

Übungsbeispiele.

87. Eine Turbine hat *5,5* Meter Gefälle und empfängt *0,6* Kubikmeter Aufschlagwasser. Man bestimme den absoluten Effekt der Wasserkraft.

Resultat: $N = 44 \ PS$.

88. Wie viel Pferdestärken Nutzarbeit liefert diese Turbine, wenn ihr Wirkungsgrad *0,75* beträgt?

Antwort: $N' = 33\ PS.$

89. Den Wirkungsgrad eines unterschlächtigen Wasserrades zu ermitteln, wenn dasselbe bei *15* Decimeter Gefälle und *0,5* Kubikmeter Aufschlagwasser eine nützliche Arbeit von *3,5* Pferden ergiebt.

Resultat: *0,35.*

90. Welches ist die effektive Arbeit N' einer hydraulischen Kraftmaschine überhaupt, wenn allgemein das Gefälle h in Decimetern, die pro Sekunde zufliessende Wassermenge q in Kubikmetern gegeben sind und der Wirkungsgrad mit η bezeichnet wird?

Antwort: $N' = \frac{4}{3}\, \eta\, q\, h\ PS.$

91. Eine Dampfmaschine arbeitet mit voller Füllung und *3,5* Atmosphären Überdruck, der Kolben hat *25 cm* Durchmesser und *50 cm* Hub. Wie hoch berechnet sich der Wirkungsgrad dieser Maschine, wenn bei *45* Umdrehungen des Schwungrades in der Minute eine Nutzarbeit von *11,5* Pferdestärken durch direkte Messung sich herausstellt?

Auflösung: Nach der zweiten Formel ergiebt sich der absolute Effekt in runder Zahl $N = 18\ PS$; da ausserdem der Nutzeffekt $N' = 11{,}5\ PS$ gegeben ist, so findet sich der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{11{,}5}{18} = \frac{23}{36} = 0{,}64.$$

92. Der Kolben einer einfach wirkenden Pumpe habe *2 dm* Durchmesser und mache in einer Minute *27* Doppelhübe von *125 cm* Länge. Wie gross ist die zum Betriebe erforderliche mechanische Arbeit, wenn das Wasser auf eine Höhe von *14 m* gehoben werden soll und durch Bewegungshindernisse ¼ der Totalarbeit verloren geht?

Auflösung: Es ist das Wasserquantum

pro Doppelhub $= 3{,}1416 \cdot 12{,}5 = 39{,}27$ Liter,
pro Minute $= 39{,}27 \cdot 27 = 1060{,}29$ Liter,
pro Sekunde $= 17{,}6715$ Liter,

welches zugleich *17,6715 kg* wiegt, mithin ist die zum Heben des Wassers nötige Arbeit pro Sekunde

$$17{,}6715 \cdot 14 = 247{,}401\ mkg.$$

Hierzu kommt noch die Nebenarbeit, welche $^1/_4$ der gesamten, demnach $^1/_3$ der vorstehenden Arbeit ausmacht. Die zum Betriebe der Pumpe erforderliche Gesamtarbeit ist daher

$$247{,}401 \cdot \frac{4}{3} = 329{,}868 \, mkg \text{ per Sekunde,}$$

oder rund

$$4{,}4 \, PS.$$

93. Eine wie viel pferdige Dampfmaschine wäre aber für vorstehende Pumpe zu wählen, wenn der Lieferant der ersteren einen Wirkungsgrad von *0,66* garantiert?

Antwort: Eine *6,6* pferdige Dampfmaschine.

94. Für eine Dampfmaschine ist der Kolbendurchmesser *30*, der Kolbenhub *60 cm* und der Wirkungsgrad $\frac{7}{11}$; wie viel Umdrehungen muss das Schwungrad in der Minute bei *4* Atmosphären machen, um einen Nutzeffekt von *24* Pferdestärken zu erzielen, wenn π zu $\frac{22}{7}$ angenommen wird?

Antwort: Aus der zweiten Beziehung für N ergiebt sich nach Einsetzung der gegebenen Zahlenwerte $n = 50$.

95. Wie viel Atmosphären Überdruck müssten aber auf den Dampfkolben wirken, wenn der Betrieb einer Fabrik eine effektive Arbeit von *18* Pferdestärken und für das Schwungrad die Tourenzahl *60* verlangt?

Antwort: $p = 2{,}5$.

§ 30.

Wasserhebung durch Kolbenpumpen.

Wir wollen jetzt noch etwas eingehender zeigen, wie in der Praxis bei Anwendung von Maschinen die unvermeidlichen Verluste an mechanischer Arbeit berücksichtigt, bezw. in Rechnung gebracht werden können und wählen zu diesem Behufe als geeignetes Erläuterungsbeispiel eine Saug- und Druckpumpe, mittels welcher aus einem Brunnen minutlich ein gewisses Wasserquantum auf eine bestimmte Höhe gehoben werden soll.

Dabei sei vorausgeschickt, dass derartige Pumpen einfachwirkend heissen, wenn sie bei jedem Doppelhub (ganzem Kolbenspiel) eine einfache Füllung des Stiefels, das ist ein Volumen gleich

dem Produkte aus Kolbenquerschnitt und Hublänge, befördern, dagegen doppeltwirkend, sobald sie bei jedem ganzen Kolbenspiele zwei Füllungen liefern; die Kolben selbst können entweder durchbrochen und mit Saugventil versehen oder auch massiv sein.

In Figur 14 erblicken wir eine einfach wirkende Pumpe mit durchbrochenem Kolben. Beim Aufgange des letzteren ist das Kegelventil b geöffnet, das Klappenventil a geschlossen und folglich wird das Wasser im Saugerohr A, wie im Steigerohr B gehoben; beim Niedergang ist a auf und b zu, sodass keine Wasserbewegung in den Rohren stattfindet. Dagegen zeigt

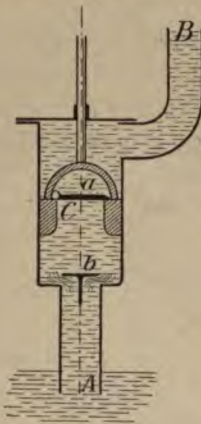


Fig. 14.

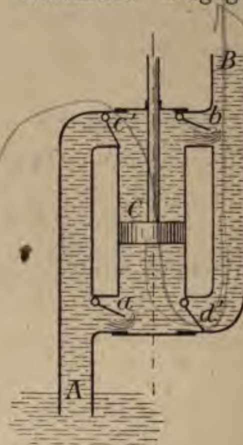


Fig. 15.

Figur 15 eine doppeltwirkende Pumpe mit massivem Scheibenkolben. Hier sind während der aufsteigenden Bewegung des letzteren die Ventile a und b, während der niedergehenden aber c' und d' offen. Man sieht, dass diese Pumpe einen ununterbrochenen Ausfluss giebt.

Wenn nun

H die gesamte Förderhöhe (d. i. der senkrechte Abstand des Ausgusses vom Wasserspiegel des Brunnens),
D den Durchmesser } des Kolbens,
c die Geschwindigkeit } des Kolbens,
s die Hublänge } des Kolbens,
d den Durchmesser der Leitungsrohre,
v die Geschwindigkeit des Wassers in denselben,
} alles in Metern

γ das Gewicht eines Kubikmeters Wasser in Kilogrammen und
n die Anzahl der ganzen Kolbenspiele während einer Minute, d. i. zugleich die Tourenzahl der Kurbelwelle bezeichnen, so wäre die durch eine doppeltwirkende Pumpe per Sekunde geförderte Wassermenge $= \frac{D^2 \pi}{4} \cdot c$, folglich das minutliche Quantum

$$60 \cdot \frac{D^2 \pi c}{4} = 15\, D^2 \pi c$$

und jede einfach wirkende Pumpe würde bei den gleichen Werten von D und c nur die Hälfte Wasser liefern.

Allein in Wirklichkeit wird ein geringeres Wasservolumen gehoben, weil ein Teil des letzteren durch die Ventile zurückfliesst. Man trägt diesem Umstande Rechnung, indem man das minutlich geleistete effektive Wasserquantum bei doppeltwirkenden Pumpen

$$Q = 15\, D^2 \pi c \psi \text{ Kubikmeter} \quad \ldots \quad (Ia)$$

und bei einfach wirkenden Pumpen

$$Q = \frac{15}{2} D^2 \pi c \psi \text{ Kubikmeter} \quad \ldots \quad (Ib)$$

setzt, worin erfahrungsgemäss

$\psi = 0{,}95$ für sorgfältig ausgeführte Pumpen,
$\psi = 0{,}9$ „ gute Pumpen und
$\psi = 0{,}8$ „ gewöhnliche Pumpen

zu nehmen ist. Die mittlere Geschwindigkeit c des Kolbens muss aus Zweckmässigkeitsgründen zwischen den Grenzen $0{,}15\ m$ und $0{,}39\ m$ liegen und nur in ganz seltenen Ausnahmefällen darf sie die äussersten Extreme von $0{,}06\ m$ nach unten (z. B. bei Pumpen mit Handbetrieb) und von $0{,}8\ m$ nach oben erreichen. Bezüglich der Formeln Ia, bzw. Ib kommen zweierlei Aufgaben vor, indem erstens Durchmesser und Geschwindigkeit des Kolbens gegeben sind und nach der minutlichen Leistung der Pumpe gefragt wird.

Wenn beispielsweise der $0{,}2\ m$ starke Kolben einer gewöhnlichen einfachwirkenden Pumpe mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $0{,}25\ m$ läuft, so erhalten wir für $D = 0{,}2$, $c = 0{,}25$ und $\psi = 0{,}8$ aus Formel Ib die per Minute gelieferte Wassermenge

$$Q = \frac{15}{2} (0,2)^2 \pi \cdot 0,25 \cdot 0,8 = 0,1885 \; cbm$$

oder

$$Q = 188,5 \; Liter.$$

Zweitens kann das während einer Minute zu leistende Wasserquantum Q verlangt sein. In diesem Falle werden auf Grund der vorliegenden Umstände und gegebenen Verhältnisse die Werte von ψ und c innerhalb der obigen Grenzen gewählt und hierauf der Kolbendurchmesser D mittels Ia oder Ib berechnet, jenachdem die Pumpe doppelt oder einfach wirkend sein soll.

Es soll z. B. mit Hilfe einer neu anzuschaffenden doppeltwirkenden Pumpe bester Konstruktion gewöhnlich *1 cbm*, zuweilen aber auch *2 cbm* per Minute gefördert und auf Grund dieser Angaben der notwendige Kolbendurchmesser D bestimmt werden. Hier wählen wir als Kolbengeschwindigkeit $c = 0,2 \; m$, damit dieselbe eventuell verdoppelt und demgemäss noch einmal soviel Wasser geliefert werden kann und führen ausserdem $Q = 1$, sowie $\psi = 0,95$ in die aus Ia folgende Beziehung

$$D = \sqrt{\frac{Q}{15 \pi c \psi}}$$

ein, wodurch entsteht

$$D = \sqrt{\frac{1}{15 \pi \cdot 0,2 \cdot 0,95}} = 0,3342 \; m = \sim 334 \; mm,$$

der verlangte Kolbendurchmesser.

Ein weiteres Nebenhindernis entsteht bei dem Emporsteigen des Wassers durch die Reibung des letzteren an den inneren Röhrenwänden. Zu deren Überwindung gehört offenbar eine gewisse Kraft und da wir uns diese Kraft in Gestalt einer auf der Kolbenfläche lastenden Wassersäule vorstellen können, so ist es auch angängig, die genannte Wasserreibung dadurch zu berücksichtigen, dass wir die Förderhöhe H um einen entsprechenden Betrag h vermehren, welcher deshalb auch die den Leitungswiderständen entsprechende Druckhöhe oder kurzweg die Widerstandshöhe genannt wird. Letztere ist der Länge l der Rohrleitung proportional und ihr Wert kann in jedem speziellen Falle aus folgender Tabelle entnommen werden.

Widerstandshöhen *h* für Rohrleitungen
von $d = 0{,}025$ bis $0{,}25\ m$ innerer Weite bei $v = 0{,}6$ bis $2\ m$ Wassergeschwindigkeit auf einen Meter Rohrlänge. *)

v in Metern	$d =$	0,025 m	0,050 m	0,075 m	0,100 m	0,125 m	0,150 m	0,200 m	0,250 m
0,6	$h =$	0,01955	0,00977	0,00652	0,00489	0,00391	0,00326	0,00244	0,00195
0,8	$h =$	0,03261	0,01630	0,01087	0,00815	0,00652	0,00543	0,00408	0,00326
1,0	$h =$	0,04866	0,02433	0,01622	0,01217	0,00973	0,00811	0,00608	0,00487
1,25	$h =$	0,07285	0,03643	0,02428	0,01821	0,01457	0,01214	0,00911	0,00728
1,50	$h =$	0,10151	0,05076	0,03384	0,02538	0,02030	0,01692	0,01269	0,01015
1,75	$h =$	0,13461	0,06731	0,04487	0,03365	0,02692	0,02244	0,01682	0,01346
2,00	$h =$	0,17199	0,08599	0,05733	0,04300	0,03440	0,02866	0,02150	0,01720

Beispielsweise wäre demnach für ein Rohr mit der lichten Weite von $125\ mm$, in welchem das Wasser mit $0{,}8\ m$ Geschwindigkeit fliesst, die Widerstandshöhe bei $1\ m$ Länge gleich $0{,}00652\ m$, folglich bei etwa $55\ m$ Länge gleich $0{,}00652 \cdot 55 = 0{,}3586\ m$, ferner bei $250\ m$ Länge gleich $0{,}00652 \cdot 250 = 1{,}63\ m$ etc.

Die obige Tabelle lässt erkennen, dass die Widerstandshöhe h um so bedeutender ausfällt, je grösser v und je kleiner d ist und weil wir offenbar die Widerstandshöhe h recht klein wünschen, so folgt schon hieraus, dass die Werte von v und d nicht etwa ganz nach Willkür gewählt werden dürfen.

Die Wassergeschwindigkeit v soll man deshalb womöglich gleich einem Meter, jedenfalls aber kleiner als zwei Meter annehmen und hiernach richtet sich wieder die Grösse des inneren Rohrdurchmessers d, wie folgende Betrachtung lehrt: Bewegt sich

*) Die Zahlenwerte der Tabelle sind berechnet aus der Formel

$$h = \left(0{,}000733 + \frac{0{,}000483}{\sqrt{v}}\right) \cdot \frac{v^2\, l}{d},$$

welche Julius Weisbach auf Grund theoretischer Erwägungen und umfassender praktischer Versuche fand und worin v, l und d in Metern die angegebene Bedeutung haben.

Ausführlichere Tabellen für die Widerstandshöhen h, nämlich zwischen weiteren Grenzen und in kleineren Abständen von v und d finden sich in Taschenbüchern und Kalendern für Ingenieure, z. B. in der „Hütte“ und in Uhland's Kalender. Dort ist aber h auf $100\ m$ Rohrlänge und auch zugleich die minutliche Wassermenge Q für alle Werte von v und d angegeben.

der Kolben aufwärts, so wird per Sekunde im Stiefel ein Wassercylinder mit dem Querschnitt $\frac{D^2 \pi}{4}$ und der Höhe c, folglich dem Rauminhalte

$$\frac{D^2 \pi}{4} \cdot c$$

und während der nämlichen Zeit im Leitungsrohre ein Cylinder vom Durchmesser d und der Höhe v, mithin vom Volumen

$$\frac{d^2 \pi}{4} \cdot v$$

gehoben und da offenbar beide Kubikräume übereinstimmen müssen, so besteht die Gleichung

$$\frac{d^2 \pi}{4} \cdot v = \frac{D^2 \pi}{4} \cdot c$$

oder

$$d^2 v = D^2 c,$$

woraus folgt

$$d = D \cdot \sqrt{\frac{c}{v}}, \quad \ldots\ldots \quad (II)$$

eine Formel, welche sowohl für einfach- als doppeltwirkende Pumpen gilt.

Die Sache liegt demnach so, dass bei einer derartigen Pumpenanlage zunächst v passend gewählt wird (thunlichst gleich einem Meter), hierauf aus vorstehender Beziehung II der zugehörige Wert von d und dann mittels obiger Zahlentabelle die entsprechende Widerstandshöhe h bestimmt wird.

Greifen wir zur näheren Erläuterung auf das obige Zahlenbeispiel zurück, wo der Kolben den Durchmesser $D = 0{,}334\ m$ haben und mit der Geschwindigkeit $c = 0{,}2\ m$ laufen sollte, so ergiebt sich bei $v = 0{,}8\ m$ Wassergeschwindigkeit in den Leitungsrohren nach II der innere Durchmesser der letzteren

$$d = 0{,}334 \cdot \sqrt{\frac{0{,}2}{0{,}8}} = 0{,}167\ m$$

und wir haben nun alles nötige, um die Widerstandshöhe zu ermitteln. In der Tabelle findet sich bei

$$v = 0{,}8\ m$$

für $0{,}15\ m$ Rohrweite $0{,}00543$ und für $0{,}2\ m$ Rohrweite $0{,}00408$; wir nehmen für unsere Rohrweite von $0{,}167\ m$, welche zwischen beiden

liegt, weil ungünstiger, den grösseren Wert $0{,}00543$, welcher die Widerstandshöhe auf einen Meter laufende Rohrlänge angiebt. Angenommen nun, die gesamte Rohrlänge von der Quelle bis zum Ausguss wäre $293\ m$ lang, so erhielten wir die gesamte Widerstandshöhe

$$h = 0{,}00543 \cdot 293 = 1{,}59099 = \sim \mathbf{1{,}6\ m.}$$

Wer h noch genauer haben wollte, könnte entweder einen passenden Wert zwischen den Widerstandshöhen $0{,}00543$ und $0{,}00408$ pro laufenden Meter Rohrlänge wählen (etwa das Mittel $0{,}004755$, wodurch $h = 1{,}4\ m$ entstände), oder er könnte in der Fussnote Seite 51 angegebenen Formel $v = 0{,}8$, $l = 293$ und $d = 0{,}167$ setzen, auf welche Weise er $h = 1{,}43\ m$ erhalten würde. Allein praktischen Wert können diese letzteren Rechnungen in keiner Weise beanspruchen, weil der zuerst bestimmte Wert von h für alle Fälle genügende Genauigkeit besitzt.

Bei Wahl der grösseren Ausflussgeschwindigkeit

$$v = 2\ m$$

hätten wir dagegen den kleineren lichten Rohrdurchmesser

$$d = 0{,}334 \cdot \sqrt{\frac{0{,}2}{2}} = 0{,}0334 \cdot \sqrt{10} = \sim \mathbf{0{,}106\ m}$$

und mithin die wesentlich bedeutendere Widerstandshöhe

$$h = 0{,}041 \cdot 293 = \sim \mathbf{12\ m}$$

erhalten.

Jetzt soll also die Pumpe während einer Minute das Wasserquantum Q, welches $Q\,\gamma$ Kilogramm wiegt, auf eine Höhe von $H + h$ Meter heben, mithin per Minute die Nutzarbeit

$$A = Q\,\gamma\,(H + h) \text{ Meterkilogramm}$$

leisten, allein die auf den Pumpenkolben übertragene Totalarbeit A' muss wiederum wesentlich grösser sein, weil die Kolbenreibung, die Widerstände beim Eintritt des Wassers durch den Saugkorb in das Saugrohr und die Trägheit der ruckweise bewegten Körper noch nicht in Anschlag gebracht worden sind. Werden alle diese Nebenhindernisse durch den Wirkungsgrad η der Pumpe berücksichtigt, so folgt aus $A = \eta\,A'$ der minutliche Arbeitsverbrauch der Pumpe

$$A' = \frac{A}{\eta} = Q\,\gamma \cdot \frac{H + h}{\eta} \text{ Meterkilogramm}$$

oder per Sekunde und in Pferdestärken

$$N = \frac{Q\,\gamma}{60 \cdot 75} \cdot \frac{H + h}{\eta}$$

oder endlich, insofern $\gamma = 1000$ ist,

$$N = \frac{2}{9} Q \cdot \frac{H + h}{\eta} \text{ Pferdestärken,} \qquad (III)$$

wo man $\eta = 0,8$ bei sorgfältig ausgeführten Pumpen,
$\eta = 0,75$ bei guten Pumpen und
$\eta = 0,7$ bis $0,6$ bei gewöhnlichen Pumpen
zu setzen pflegt und nicht ausser acht lassen darf, dass der Wert von Q bei doppeltwirkenden Pumpen aus I^a und bei einfachwirkenden aus I^b berechnet werden muss.

Für unseren besonderen Fall war bei $c = 0,2\ m$ uud $D = 0,334\ m$ die minutliche Ausflussmenge

$$Q = 1\ cbm$$

und, sofern $v = 0,8\ m$ gewählt wurde, die lichte Rohrweite $d = 0,167\ m$ und damit die Widerstandshöhe $h = 1,6\ m$.

Wir nehmen eine Förderhöhe von $38\ m$ an, sodass

$$H + h = 38 + 1,6 = 39,6\ m$$

ist und setzen, weil eine sorgfältig ausgeführte Pumpe benutzt werden sollte, den Wirkungsgrad

$$\eta = 0,8.$$

Dann ergiebt Formel III das Resultat

$$N = \frac{2}{9} \cdot 1 \cdot \frac{39,6}{0,8} = 11 \text{ Pferdestärken}$$

und wir sehen, dass zum Betriebe dieser Pumpe, insofern sie per Minute *1 cbm* Wasser liefern soll, eine Maschine mit dem Nutzeffekt von *11* Pferdestärken erforderlich ist.

Um aber mit der nämlichen Pumpe nötigenfalls das doppelte Wasserquantum

$$Q = 2\ cbm$$

zu leisten, müsste der Kolben zwei mal so schnell wie vorhin sich bewegen, also die Geschwindigkeit $c = 2 \cdot 0,2 = 0,4\ m$ haben. Hierdurch bekämen wir aber auch die zweifache Wassergeschwindigkeit $v = 1,6\ m$ in den Leitungsrohren, demnach weiter die entsprechend grössere Widerstandshöhe

$$h = 0,017 \cdot 293 = \sim 5\ m$$

und mithin nach Formel III die erforderliche Nutzarbeit

$$N = \frac{2}{9} \cdot 2 \cdot \frac{38 + 5}{0,8} = 23,88 = \sim 24 \text{ Pferdestärken.}$$

Im ersten Falle wird per Minute *1 cbm* oder *1000 kg* Wasser *38 m* hoch gehoben, folglich ist die per Sekunde ohne Rücksicht auf Nebenhindernisse geleistete Arbeit

$$\frac{1000 \cdot 38}{60 \cdot 75} = 8,44 \text{ Pferdestärken,}$$

während die auf den Pumpenkolben übertragene Totalarbeit *11* Pferdestärken betrug und mithin erhalten wir als Wirkungsgrad der ganzen Pumpenanlage

$$\eta_1 = \frac{8,44}{11} = \mathbf{0,767}.$$

Im zweiten Falle ist die nützliche Arbeit unserer Pumpe genau doppelt so gross, also *17,334* Pferdestärken und somit ergiebt sich hier der Wirkungsgrad

$$\eta_2 = \frac{16,88}{24} = \mathbf{0,703}$$

etwas geringer, wie vorhin, weil durch die höhere Wassergeschwindigkeit eine grössere Reibung an den Innenwänden der Saug- und Druckrohre hervorgerufen wird.

Immerhin ist beidemale der Gesamtwirkungsgrad des Pumpwerkes recht günstig und dies haben wir einerseits der guten Konstruktion der Pumpe und anderseits der nicht zu hohen Wassergeschwindigkeit (*0,8 m*, bzw. *1,6 m*) in den Leitungsrohren zu verdanken.

Schliesslich lässt sich noch leicht zeigen, dass auch die Hublänge s und die Geschwindigkeit c, sowie die minutliche Umdrehungszahl n der Kurbelwelle in einem gegenseitigen Abhängigkeitsverhältnis zu einander stehen; denn der Weg des Kolbens ist

während einer vollen Umdrehung der Kurbel $= 2\,s$, folglich
„ „ Minute $= 2\,n\,s$ und demnach
„ „ Sekunde $= \frac{2\,n\,s}{60} = \frac{n\,s}{30}$.

Letzterer Weg ist aber die Kolbengeschwindigkeit c und mithin gilt die Beziehung

$$c = \frac{n\,s}{30}$$

oder

$$n\,s = 30\,c \quad \ldots\ldots \quad (IV)$$

Weil aber, wie oben näher ausgeführt wurde, über c, welches zwischen *0,15* und *0,35 m* liegen soll, je nach Umständen und Absichten verfügt werden muss und weil es sich ferner als vorteilhaft erwiesen hat,

bei Pumpen mit durchbrochenen Kolben $s = 1,5\,D$ bis $2\,D$
„ „ „ massiven „ $s = 2\,D$ „ $4\,D$
„ doppelt wirkenden Pumpen $s = 1,5\,D$ „ $2,5\,D$

zu nehmen, so bleibt in Gleichung IV als Unbekannte nur n übrig und wir können folglich daraus die minutliche Umlaufszahl n der Kurbelwelle berechnen.

In unserem speziellen Beispiele war der Kolbendurchmesser $D = 0{,}334\ m$. Wir dürfen nun die Hublänge s zwischen $1{,}5\ D$ und $2{,}5\ D$ wählen, setzen demnach etwa

$$s = 2\ D = \boldsymbol{0{,}668\ m}$$

und erhalten jetzt bei der gewöhnlichen Kolbengeschwindigkeit $c = 0{,}2\ m$ nach Formel IV die zugehörige Tourenzahl

$$n_1 = \frac{30\ c}{s} = \frac{30 \cdot 0{,}2}{0{,}668} = 8{,}98 = \sim \boldsymbol{9};$$

dagegen bei der aussergewöhnlichen und höchsten Kolbengeschwindigkeit $c = 0{,}4\ m$ die entsprechende Tourenzahl

$$n_2 = \frac{30 \cdot 0{,}4}{0{,}668} = \sim \boldsymbol{18}.$$

Auf diese Weise ist mit Berücksichtigung der in jedem besonderen Falle vorhandenen Umstände alles bestimmt und es möge nun der Inhalt des nächsten Paragraphen noch näher ersichtlich machen, wie die vorstehenden allgemeinen Ausführungen, Angaben und Formeln auf die Praxis angewendet werden können.

§ 31.
Versorgung einer Stadt mit Wasser.

Für eine Industriestadt von *25000* Einwohnern soll der Wasserbedarf mittels einer doppelt wirkenden Kolbenpumpe guter Konstruktion gedeckt werden. Bei Benutzung von Wassermessern, welche hier stattfinden soll, darf erfahrungsgemäss der tägliche Verbrauch einschliesslich der Wassermengen für Viehställe, Wagenreinigung, Schulen, Strassenbesprengungen, allerlei Gewerbe etc. pro Kopf zu *120* Liter veranschlagt werden und es ist daher das von der Pumpe zu liefernde Wasserquantum per Tag $25000 \cdot 0{,}12 = 3000\ cbm$, demnach per Minute $\frac{3000}{24 \cdot 60}$, also nach unserer Bezeichnungsweise

$$Q = \frac{25}{12}\ cbm.$$

Als Kolbengeschwindigkeit, welche zwischen $0{,}15\ m$ und $0{,}39\ m$ schwanken darf, wählen wir $\frac{2}{3}$ des grössten zulässigen Wertes, damit im Notfalle die Hälfte mehr Wasser gepumpt werden kann, setzen also

$$c = \frac{2}{3} \cdot 0{,}39 = \mathbf{0{,}26\ m}$$

und erhalten hierdurch unter Voraussetzung einer guten Pumpe, mithin bei Annahme von

$$\psi = \mathbf{0{,}9}$$

aus Formel I[a] des vorigen Paragraphen den Kolbendurchmesser

$$D = \sqrt{\frac{Q}{15\,\pi\,c\,\psi}} = \sqrt{\frac{25}{12 \cdot 15\,\pi \cdot 0{,}26 \cdot 09}} = \sim \mathbf{0{,}435\ m.}$$

Da wir nun weiter in den Leitungsrohren die normale Wassergeschwindigkeit

$$v = \mathbf{1\ m}$$

wünschen, so ergiebt sich mit Benützung der vorstehenden Werte von c, D und v laut Formel II die lichte Weite der ersteren

$$d = D \cdot \sqrt{\frac{c}{v}} = 0{,}435 \sqrt{0{,}26} = \sim \mathbf{0{,}222\ m.}$$

Behufs Erzielung einer grösseren Regelmässigkeit in der Wasserlieferung und damit auch die höchstgelegenen Punkte der Stadt mit Wasser versorgt werden können, soll letzteres zunächst in ein *98 m* höher als die Quelle liegendes Hochreservoir geführt werden und zwar durch eine *1818 m* lange Rohrleitung. Hier ist also die gesamte Förderhöhe

$$H = \mathbf{98\ m}$$

und es findet sich zunächst die auf den laufenden Meter entfallende Widerstandshöhe bei $v = 1\ m$ und $d = 0{,}222\ m$ laut Tabelle Seite 51 zwischen *0,00608* und *0,00487*. Wir nehmen das ohngefähre Mittel *0,0055* und bekommen auf *1818 m* Länge die Widerstandshöhe, welche dem durch die Wasserreibung verursachten Druckverlust entspricht,

$$h = 0{,}0055 \cdot 1818 = 9{,}999 = \sim \mathbf{10\ m,}$$

so dass sich nach Formel III, den Wirkungsgrad

$$\eta = \mathbf{0{,}75}$$

angenommen, bei der gewöhnlichen Lieferung von $\frac{25}{12}$ *cbm* per Minute, die zum Betriebe der Pumpe nötige Nutzarbeit

$$N = \frac{2}{9}\,Q \cdot \frac{H + h}{\eta} = \frac{2}{9} \cdot \frac{25}{12} \cdot \frac{108}{0{,}75} = 66\frac{2}{3} \text{ Pferdestärken}$$

herausstellt. Sollte diese Pumpe in aussergewöhnlichen Fällen noch die Hälfte mehr, das sind im ganzen $3^1/_8$ *cbm* per Minute liefern, so wären nicht blos $33^1/_3$ weitere, also zusammen gerade *100* Pferdestärken erforderlich, sondern noch etwas darüber, weil hierdurch die Kolbengeschwindigkeit c, infolgedessen auch die Wassergeschwindigkeit v und dadurch wieder die Reibung in der Rohrleitung beträchtlich erhöht würde. Es kann aber dem Leser überlassen bleiben, sich durch die Rechnung von dem nachteiligen Einfluss der Geschwindigkeitsvergrösserung auf die Widerstandshöhe und die Betriebsarbeit selbst zu überzeugen.

Was ferner die Hublänge s des Kolbens und die Tourenzahl n der Kurbelwelle anbelangt, so würden wir zunächst passend

$$s = 2\,D = 2 \cdot 0{,}435 = \mathbf{0{,}87}\ m$$

wählen und bekämen dann nach Formel IV bei der normalen Kolbengeschwindigkeit $c = 0{,}26\ m$ die Tourenzahl

$$n = \frac{30\,c}{s} = \frac{7{,}8}{0{,}87} = 8{,}97 = \sim \mathbf{9},$$

während der maximalen Kolbengeschwindigkeit $c = 0{,}39$ die höhere Umlaufszahl

$$n = \frac{30 \cdot 0{,}39}{0{,}87} = \sim \mathbf{13^1/_2}$$

entsprechen würde.

Wir wollen nun schliesslich annehmen, dass ein Wasserlauf zur Verfügung steht, welcher bei einem nutzbaren Gefälle von *8 m* selbst in trockener Jahreszeit noch *1,5 cbm* Aufschlagwasser liefert und die Frage aufwerfen, ob die innewohnende Wasserkraft zum Betriebe unseres Pumpwerkes hinreicht. Nun ist aber nach § 28 die sekundliche Totalarbeit der letztern

$$\frac{1500 \cdot 8}{75} = 160 \text{ Pferdestärken}$$

und dieser Effekt genügt vollständig für unseren Zweck; denn übertragen wir ihn durch eine Turbine mit dem Wirkungsgrad *0,7* auf den Pumpenkolben, so empfängt letzterer

$$160 \cdot 0{,}7 = 112 \text{ Pferdestärken,}$$

welche selbst in dem äussersten Falle noch ausreichen, wo der Kolben einmal ausnahmsweise die zulässig grösste Geschwindigkeit von *0,39 m* besitzen sollte.

§ 32.

Hauspumpe mit Handkurbelbetrieb.

Die Ausführungen und Berechnungen der vorstehenden beiden Paragraphen lassen deutlich erkennen, wie man bei Anlage eines Pumpwerks imstande ist, zu grossen Verlusten an Kraft und Arbeit vorzubeugen. Zu diesem Behufe muss man vor allem eine Pumpe bester Konstruktion und sorgfältigster Ausführung anschaffen, damit der Zurückfluss des Wassers durch die Ventile, dann die Kolbenreibung und die andern schädlichen Einflüsse thunlichst klein ausfallen und hierdurch die Wirkungsgrade der Pumpe ψ und η dem Ideal 1 so nahe wie möglich gebracht werden.

Demnächst möge man bestrebt sein, die Wasserreibung in den Leitungsrohren, welche ihren Ausdruck in der Widerstandshöhe h findet, auf einen kleinsten Wert herabzudrücken. Wir erinnern uns, dass letztere um so grösser wird, 1. je länger die Rohrleitung, 2. je kleiner der innere Rohrdurchmesser d und 3. je bedeutender die Wassergeschwindigkeit v ist: man müsste folglich danach trachten, die Rohrleitung möglichst kurz, d möglichst gross und v möglichst klein zu machen.

Freilich lässt sich in Bezug auf den ersten Punkt weiter nichts thun, als mit der Rohrleitung zwischen Pumpe und Sammelbassin alle unnötigen Umwege zu vermeiden; dagegen können wir die beiden letzten Anforderungen zugleich erfüllen, indem wir eine mässige Kolbengeschwindigkeit mit einem nicht zu kleinen Wert von d verbinden — natürlich immer wieder nur innerhalb derjenigen Grenzen, welche uns durch andere oftmals schwerer wiegende Rücksichten gesteckt sind.

Im allgemeinen kann man sagen, dass die Widerstandshöhe h um so mehr ins Gewicht fällt, je länger die Rohrleitung im Verhältnis zur Förderhöhe H ist und umgekehrt hat in dem Falle, wo erstere die letztere nur wenig oder gar nicht übertrifft, die Widerstandshöhe h bei nicht zu kleinem d und nicht zu grossem v einen derartig geringen Betrag, dass man sie ohne Bedenken ganz vernachlässigen darf. Wir wollen uns von der Richtigkeit dieser letzteren Behauptung an der Hand eines speziellen Beispieles überzeugen.

Es soll das zur Haushaltung nötige Wasser aus dem nahe gelegenen Brunnen in ein unter dem Dache befindliches Reservoir gehoben werden, und man bestimmt dazu eine sorgfältig ausgeführte doppelt wirkende Pumpe mit dem durch Figur 16 zur Anschauung gebrachten Handkurbelbetrieb. Der Kolben hat den Durchmesser $D = 80\,mm = 0{,}08\,m$ und die Hubhöhe $s = 120\,mm = 0{,}12\,m$, während die gesamte Länge der Rohrleitung $l = 32\,m$ und ihre lichte Weite $d = 40\,mm = 0{,}04\,m$ beträgt.

Wird jetzt die Kurbel während einer Minute $n = 15{,}5$ mal umgedreht, so folgt, wenn wir uns wieder auf die allgemeinen

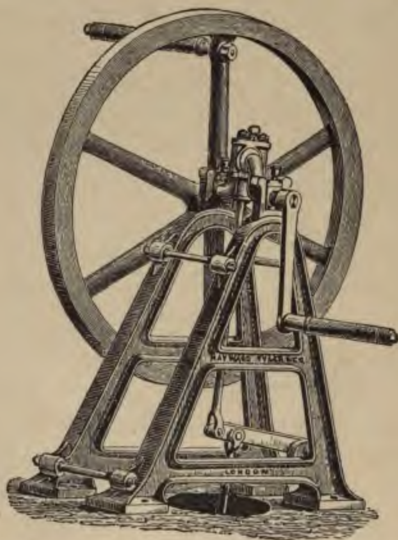


Fig. 16.

Resultate in § 30 beziehen, nach Formel IV die Kolbengeschwindigkeit

$$c = \frac{n\,s}{30} = \frac{15{,}5 \cdot 0{,}12}{30} = \mathbf{0{,}062\,m}$$

und mithin nach II die Wassergeschwindigkeit in den Rohren

$$v = \left(\frac{D}{d}\right)^2 \cdot c = 4 \cdot 0{,}062 = 0{,}248 = \sim \mathbf{0{,}25\,m.}$$

Zur Ermittelung der entsprechenden Widerstandshöhe h lässt uns diesmal die Tabelle auf Seite 51 im Stich, weil sie nur die

Geschwindigkeiten von $v = 0,6$ bis $v = 2\ m$ umfasst, wir rechnen daher mit der in der Fussnote angegebenen Beziehung

$$h = \left(0,000733 + \frac{0,000483}{\sqrt{v}}\right) \cdot \frac{v^2 l}{d},$$

aus welcher sich mit Einführung unserer Zahlenwerte $v = 0,25$, $l = 32$ und $d = 0,04$

$$h = \left(0,000733 + \frac{0,000483}{0,5}\right) \cdot \frac{0,0625 \cdot 32}{0,04}$$

oder

$$h = 0,001699 \cdot 50 = \sim \mathbf{0,085\ m},$$

also noch nicht ein Zehntel Meter ergiebt. Im Hinblick auf die immerhin ziemlich grosse Unsicherheit der Erfahrungskoëffizienten ψ und η wäre eine Berücksichtigung dieser verhältnismässig winzigen Zahl geradezu unlogisch.

Wünschen wir das minutlich gelieferte Wasserquantum Q zu erfahren, so substituieren wir in Ia, § 30, die obigen Werte $D = 0,08\ m$ und $c = 0,062\ m$, sowie $\psi = 0,95$ und erhalten

$$Q = 15\, D^2 \pi\, c\, \psi = 15 \cdot 0,0064\, \pi \cdot 0,062 \cdot 0,95 = \mathbf{0,01776\ cbm},$$

das sind rund $17^3/_4$ Liter.

Zum Schlusse fragen wir, welcher Effekt E bei dieser Leistung auf die Kurbelgriffe ausgeübt werden muss, wenn die gesamte Förderhöhe $H = 24\ m$, sowie die Wirkungsgrade der Pumpe, bzw. der Kurbelvorrichtung, $\eta = 0,8$ bzw. $\eta_1 = 0,95$ gegeben sind und erhalten die Antwort durch folgende Schlüsse: Die Pumpe selbst hat per Minute die Arbeit $A = 17,75 \cdot 24 = 426\ mkg$, also per Sekunde

$$\frac{A}{60} = \frac{426}{60} = 7,1\ mkg$$

zu verrichten, demnach ist der zur Bewegung des Kolbens erforderliche Effekt

$$E' = \frac{7,1}{\eta} = \frac{7,1}{0,8} = \frac{71}{8} = 8,875\ mkg$$

und mithin der auf die Handkurbeln zu übertragende, der totale Effekt

$$E = \frac{E'}{\eta_1} = \frac{8,875}{0,95} = \mathbf{9,34\ mkg},$$

welchen ein mittelstarker Arbeiter bequem zu leisten vermag.

§ 33.

Übungsbeispiele.

96. Man entwickele allgemein für eine doppelt wirkende Pumpe mit Handkurbelbetrieb (siehe Fig. 16) unter Vernachlässigung der Widerstandshöhe das per Minute geleistete Wasserquantum und den auf die Kurbelgriffe notwendigen Druck P, wenn

D den Durchmesser, s die Hublänge } des Kolbens in Decimetern,
r den Kurbelradius, H die gesamte Förderhöhe } in Metern,
n die Zahl der Kurbelumdrehungen während einer Minute,
η und ψ die Wirkungskoëffizienten der Pumpe, sowie
η_1 den Wirkungsgrad der Kurbelvorrichtung

bezeichnen.

Resultate: $Q = \frac{1}{2} \cdot D^2 \pi s n \psi$ Liter und

$$P = \frac{D^2 s \psi H}{4 r \eta \eta_1} \text{ Kilogramm.}$$

97. Welche Werte würden sich für Q und P ergeben haben, wenn die Pumpe nur einfach wirkt?

Antwort: Genau halb mal so viel.

98. Was hat es wohl für eine Bedeutung, dass in dem Ausdrucke für P die Tourenzahl n nicht mehr vorkommt?

Antwort: Es folgt daraus, dass P von der Tourenzahl n unabhängig ist oder mit andern Worten, dass genau eben so stark auf die Kurbelgriffe gedrückt werden muss, ob nun langsam oder schnell gedreht wird; auf die Geschwindigkeit kommt es dabei gar nicht an.

99. Die Werte von Q und P speziell für $D = 75\ mm$, $s = 120\ mm$, $r = 360\ mm$, $H = 19\ m$, $n = 20$, $\psi = 0{,}8$, $\eta = 0{,}6$ und $\eta_1 = 0{,}95$ zu berechnen.

Resultate: $Q = 16{,}965 = \sim 17\ l$ und $P = 12{,}5\ kg$.

100. Eine doppelt wirkende und sorgfältig auszuführende Pumpe soll sekundlich 10 Liter Wasser liefern. Wie lang hat man den Kolbendurchmesser D zu machen, wenn als geeignete Kolbengeschwindigkeit $c = 0{,}25\ m$ vorgeschrieben ist.

Anleitung zur Lösung: Mit Substitution von $Q = 0{,}6\ cbm$, $c = 0{,}25\ m$ und $\psi = 0{,}95$ in I^a, § 30, erhält man

$$D = \sqrt{\frac{Q}{15\,\pi\,c\,\psi}} = 0{,}2315\ m = 231{,}5\ mm.$$

101. Wie steht es mit der Tourenzahl n, wenn die Hublänge s gleich dem doppelten Durchmesser des Pumpencylinders gewählt wird?

Antwort: Es bestimmt sich $n = 16{,}2$.

102. Welchen inneren Durchmesser hat man den Rohren zu geben, um darin $1\ m$ Wassergeschwindigkeit zu erzielen und wie gross stellt sich die Widerstandshöhe h heraus, sobald die gesamte Leitung die Länge von $46{,}5\ m$ besitzt?

Antwort: Man findet $d = 115{,}75 = \sim 116\ mm$ und $h = \sim 0{,}5\ m$.

103. Wieviel Pferdestärken Nutzarbeit müsste der Motor leisten, um diese Pumpe zu treiben, wenn die gesamte Förderhöhe $35{,}5\ m$ beträgt und der Wirkungsgrad der Pumpe $\eta = 0{,}8$ gesetzt wird?

Antwort: $6\ PS$.

104. Eine in ebener Gegend gelegene Stadt von 12000 Einwohnern soll mit Wasser versorgt und letzteres zu dem Ende durch eine gute Pumpe, für welche $\psi = 0{,}9$ angenommen werden darf, in ein Hochreservoir gehoben werden. Wie hoch stellt sich das minutlich zu liefernde Wasserquantum Q, wenn der tägliche Bedarf zu 90 Liter pro Kopf gerechnet wird und wie lang ist demnach der Durchmesser D des Pumpencylinders bei der vorgeschriebenen Kolbengeschwindigkeit $c = 0{,}3\ m$ zu wählen?

Antwort: $Q = 0{,}75\ cbm$ und $D = 0{,}2428\ m = 242{,}8\ mm$.

105. Das Wasser soll einem Flusse entnommen werden, welcher am Aufstellungspunkte der Pumpe circa $2\ km$ entfernt ist und zwar beträgt die genaue Länge der projektierten Rohrleitung $2130\ m$. Es wird nun die Frage aufgeworfen, wie hoch sich zunächst bei der gewöhnlichen Wassergeschwindigkeit $\boldsymbol{v = 1\ m}$ die zugehörige lichte Rohrweite d und die entsprechende Widerstandshöhe h belaufen würde.

Resultate: $d = 0{,}1329\ m = \sim 133\ mm$ und $h = 19{,}47 = \sim 19{,}5\ m$.

106. Dieser letzte Wert erscheint zu hoch und man wünscht daher zu erfahren, welche Rohrweite und Widerstandshöhe die kleinere Wassergeschwindigkeit $\boldsymbol{v = 0{,}6\ m}$ nach sich zieht?

Antwort: $d = 171{,}7\ mm$ und $h = 6{,}08 = \sim 6{,}1\ m$.

107. Wie viel Pferdestärken sind zum Betriebe der Pumpe in beiden Fällen unter der Bedingung erforderlich, dass der Ausguss des Leitungsrohres *31 m* höher als der Wasserspiegel des Flusses liegt und der Wirkungsgrad der Pumpe $\eta = 0{,}75$ gesetzt wird?

Antwort: Im ersten Falle *11,22 PS*, im zweiten nur *8,24 PS*, so dass man bei Wahl des grösseren inneren Rohrdurchmessers $d = 171{,}7\ mm$ drei Pferdestärken, das sind reichlich *26%* an Arbeitskraft spart. Dies Beispiel zeigt auch, dass eine (auf Rechnung beruhende) richtige Verfügung über die in Frage kommenden Grössen von hohem praktischen Werte sein kann.

Drittes Kapitel.

Das dritte Grundgesetz. Masse. Arbeitsvermögen bewegter Körper.

§ 34.

Das Grundgesetz der Beschleunigung.

Nach dem dritten Grundgesetze der Mechanik erteilen irgend zwei Kräfte P_1 und P_2, welche nacheinander auf ein und denselben Körper wirken, letzterem diejenigen beiden Beschleunigungen p_1 und p_2, welche sich genau so verhalten, wie jene Kräfte P_1 und P_2 selbst; es besteht also die Proportion

$$P_1 : P_2 = p_1 : p_2. \quad \cdots \cdots \quad (22)$$

Um eine klare Vorstellung vom Inhalte dieses Erfahrungsgesetzes zu erlangen, denke man sich auf horizontalem und geradlinigem Geleise einen Güterzug und vor denselben eine Maschine gespannt, welche genau *4400 kg* Triebkraft entwickelt. Beträgt nun das Bewegungshindernis der Reibung (vom Luftwiderstand wollen wir absehen) dauernd *2400 kg*, ist mithin die den Zug wirklich bewegende Kraft

$$P_1 = 4400 - 2400 = 2000\ kg,$$

so muss nach obigem eine gleichförmig beschleunigte Bewegung eintreten und wir nehmen weiter an, dass sorgfältige Messung die Beschleunigung

$$p_1 = 0{,}04\ m$$

ergiebt. Jetzt stellen wir denselben Zug noch einmal an den gleichen Ort hin, lassen aber von der Lokomotive *6000 kg* Triebkraft ausüben, sodass die eigentlich bewegende Kraft nunmehr

$$P_2 = 6000 - 2400 = 3600\ kg$$

ist. Dann würde nach unserem Axiom der Güterzug mit einer Beschleunigung p_2 laufen, welche sich aus der Proportion

$$P_1 : P_2 = p_1 : p_2,$$

das ist für unseren Fall

$$2000 : 3600 = 0{,}04 : p_2$$

berechnet, folglich mit der Beschleunigung

$$p_2 = 0{,}072\ m.$$

Wenn wir endlich ein drittes mal beobachteten, dass unser Güterzug mit der geringeren Beschleunigung

$$p_3 = 0{,}01\ m$$

ausläuft und wir wünschten zu wissen, welche Triebkraft x dabei in der Maschine wirksam war, so bekämen wir zunächst die beschleunigende Kraft P_3 entweder aus

$$P_1 : P_3 = p_1 : p_3, \text{ das ist } 2000 : P_3 = 0{,}04 : 0{,}01$$

oder aus

$$P_2 : P_3 = p_2 : p_3, \quad \text{„} \quad \text{„} \quad 3600 : P_3 = 0{,}072 : 0{,}01.$$

Jede dieser beiden Verhältnisgleichungen liefert die beschleunigende Kraft

$$P_3 = 500\ kg$$

und da die Lokomotive ausserdem noch *2400 kg* Bewegungswiderstände zu überwinden hat, so ist in diesem dritten Falle die gesamte Triebkraft

$$x = 500 + 2400 = 2900\ kg.$$

Haben wir auf diese Weise ein volles Verständnis für das Axiom der Beschleunigung gewonnen, so erhellt auch leicht die Richtigkeit der Proportion

$$P : G = p : g, \qquad \ldots\ldots \qquad (23)$$

worin P eine Kraft bedeuten soll, welche für sich allein einem Körper vom Gewichte G eine Beschleunigung p erteilt; denn da, wie schon früher erwähnt, das Gewicht eines jeden Körpers für letzteren selbst im luftleeren Raume eine Acceleration $g = 9{,}81$ Meter hervorbringt, so ist die Beziehung No. 23 einfach als ein spezieller Fall von No. 22 aufzufassen.

Mit Hilfe der letzten Beziehung 23 können wir z. B. leicht das Gesamtgewicht G des oben betrachteten Güterzugs einschliesslich der Lokomotive bestimmen, indem wir $2000\ kg$ für P und $0{,}04\ m$ für p setzen, wodurch sich

$$G = \frac{P g}{p} = \frac{2000 \cdot 9{,}81}{0{,}04} = 490500\ kg$$

ergiebt. Zu demselben Resultate wären wir natürlich gelangt, wenn wir $3600\ kg$ für P und $0{,}072\ m$ für p oder auch $500\ kg$ für P und $0{,}01\ m$ für p substituiert hätten.

§ 35.

Übungsbeispiele.

108. Ein bestimmter Körper erfährt jetzt durch eine Kraft von $24\ kg$ eine Beschleunigung von 4 Metern; welche Beschleunigung wird diesem Körper durch eine später auf ihn einwirkende Kraft von $42\ kg$ mitgeteilt werden?

Lösung: Bezeichnet man die gesuchte Beschleunigung mit x, so besteht nach 22 die Proportion $24 : 42 = 4 : x$, woraus folgt $x = 7$ Meter.

109. Welche Kraft wäre aber nötig, um demselben Körper eine Beschleunigung von $0{,}5$ Metern zu erteilen?

Antwort: 3 Kilogramm.

110. Man soll das Gewicht G dieses Körpers ermitteln.

Lösung: Nach Formel 23 folgt

$24 : G = 4 : 9{,}81$ und hieraus $G = 9{,}81 \cdot 6 = 58{,}86$ Kilogramm.

111. Ein mit Lokomotive im ganzen $400000\ kg$ wiegender Güterzug steht auf horizontaler Bahn zur Abfahrt bereit und soll binnen 1 Minute 40 Sekunden die Geschwindigkeit von $5\ m$ erlangen. Welche Triebkraft P muss die Maschine thatsächlich aufwenden, wenn die Reibungswiderstände $\frac{1}{200}$ der Last in Anspruch nehmen?

Antwort: $P = 4038{,}7\ kg$.

112. Eine Kugel von *98,1 kg* Gewicht bewegt sich auf einer sehr glatten horizontalen Ebene in gerader Linie mit einer Beschleunigung von *3* Metern. Welche Kraft ist die Ursache dieser Bewegung wenn von Reibung und Luftwiderstand abgesehen wird?

Antwort: Eine Kraft von *30* Kilogramm.

113. Das Gesamtgewicht eines Eisenbahnzuges beträgt *300000 kg.* Wie viel Zugkraft muss die Lokomotive aufwenden, um demselben auf horizontaler Bahn in *2* Minuten eine Geschwindigkeit von *12* Metern zu erteilen, selbst wenn die vorhin genannten Bewegungshindernisse unberücksichtigt gelassen werden?

Auflösung: Zunächst erhält man mit Einführung von $t = 120$ und $v = 12$ in die bekannte Relation $v = p\,t$ die Beschleunigung des Zuges $p = 0{,}1$ Meter. Nun ergiebt sich leicht nach No. 23 $P = 3058{,}1\ kg$, die Zugkraft der Lokomotive.

§ 36.

Entwickelung des Begriffes „Masse“.

Denkt man sich einen bestimmten Körper, welchem die Kraft P_1 die Beschleunigung p_1 und eine andere Kraft P_2 die Beschleunigung p_2 erteilt, so gilt nach No. 22 die Beziehung

$$P_1 : P_2 = p_1 : p_2, \text{ w. f. } P_1 : p_1 = P_2 : p_2$$

oder

$$\frac{P_1}{p_1} = \frac{P_2}{p_2}.$$

Lässt man nun auf denselben Körper die ferneren Kräfte $P_3, P_4, \cdots$ — aber jede für sich allein — wirken und bezeichnet die hervorgebrachten Beschleunigungen mit $p_3, p_4, \cdots$, so ist weiter

$$\frac{P_1}{p_1} = \frac{P_2}{p_2} = \frac{P_3}{p_3} = \frac{P_4}{p_4} = \cdots$$

Wie viele Kräfte also auch nacheinander auf einen und denselben Körper wirken mögen — der Quotient zwischen jeder derselben und der von ihr erzielten Beschleunigung bleibt immer derselbe! Es ist dies eine Thatsache, welche auch aus der Proportion 23 hervorgeht, wenn man sie in der Form

$$\frac{P}{p} = \frac{G}{g}$$

schreibt; denn weil für irgend einen Körper das Gewicht G und die Acceleration g der Erdschwere genau bestimmbare Grössen sind, so hat auch das Verhältnis $P:p$ für jeden Körper einen ganz bestimmten Wert. Dies Verhältnis heisst die Masse des Körpers und wird gewöhnlich mit M bezeichnet; man hat demnach

$$M = \frac{P}{p} = \frac{G}{g} \quad \ldots \ldots \quad (24)$$

oder in Worten: Die Masse eines Körpers ist der Quotient aus einer beliebigen auf den Körper wirkenden Kraft und der dem Körper von der Kraft erteilten Beschleunigung, speziell also auch der Quotient zwischen dem Gewichte des Körpers und der Acceleration der Erdschwere; man hüte sich aber vor Verwechselungen der beiden Begriffe „Gewicht“ und „Masse“: Das Gewicht eines Körpers ist der Druck des letzteren auf eine ruhende Unterlage und nimmt zu oder ab, jenachdem er sich dem Sitze der Erdschwere nähert oder sich davon entfernt, während die Masse eines Körpers an allen nur denkbaren Orten die gleiche ist, weil mit dem Gewichte zugleich die Acceleration und zwar derart sich ändert, dass der Quotient aus beiden der nämliche bleibt.

Um ein passendes Mass für die Masse zu erhalten, liegt am nächsten, als Einheit die Masse desjenigen Körpers festzusetzen, welchem von der Krafteinheit (ein Kilogramm) die Einheit der Beschleunigung (ein Meter) erteilt wird; das Gewicht dieses Körpers ergiebt sich, wenn man in der 24. Beziehung $P = 1$, $p = 1$ und $g = 9{,}81$ setzt. Weil hierdurch

$$M = 1 \text{ und } G = 9{,}81 \; kg$$

entsteht, so ist die Masseneinheit die Masse desjenigen Körpers, welcher bei uns $9{,}81$ Kilogramme wiegt.

§ 37.

Übungsbeispiele.

114. Wie viel Masseneinheiten enthält ein Körper von 775 Kilogramm Gewicht?

Antwort: Circa 79.

115. Welches ist die Masse eines Körpers, welchem eine Kraft von P Kilogrammen in t Sekunden eine Geschwindigkeit von v Metern erteilt?

Lösung: Aus $v = p\,t$ folgt $p = \frac{v}{t}$ und mit Einsetzung dieses Wertes in 24 : $\boldsymbol{M = \frac{P\,t}{v}}$.

116. Wie gestaltet sich das Resultat der vorigen Aufgabe für die speziellen Zahlenwerte $P = 7{,}5\ kg$, $t = 2$ Minuten und $v = 18\ m$?

Antwort: $M = 50$.

117. Man soll das Gewicht dieser Masse bestimmen.

Resultat: $G = M\,g = 490{,}5\ kg$.

118. Wenn die Beschleunigung des freien Falles auf dem Monde $1{,}7\ m$ beträgt, wie viel Kilogramm Druck übt eine an der Mondoberfläche befindliche Masse gegen ihre Unterlage aus, welche bei uns ein Kilogramm wiegen würde?

Lösung: Bezeichnen wir die gesuchte Anziehungskraft des Mondes auf die genannte Masse mit x, so gilt nach No. 23 die Proportion

$$x : 1 = 1{,}7 : 9{,}81,$$

woraus folgt

$$x = 0{,}1733 \text{ Kilogramm.}$$

119. Welche Drücke würde aber dieselbe Masse auf dem Jupiter, resp. auf der Sonne gegen ihre Unterlage ausüben, wenn die Beschleunigungen des freien Falles auf diesen Himmelskörpern $26{,}3$, resp. 270 Meter sind?

Resultat: $2{,}68$ und $27{,}52$ Kilogramm.

120. Welche Beschleunigung erzeugt eine Kraft von $68\ kg$, welche auf einen Körper von 170 Masseneinheiten wirkt?

Antwort: Eine Beschleunigung $p = 0{,}4\ m$.

121. Ein Körper von $36\ kg$ Gewicht bewegt sich vom Ruhezustande aus gleichförmig beschleunigt und durchläuft in einer Minute den Weg von $68{,}67\ m$. Man ermittele diejenige Kraft, welche diese Bewegung verursacht hat.

Lösung: $P = 0{,}14\ kg$.

122. Wie verhalten sich die Beschleunigungen p_1 und p_2, welche derselben Masse von zwei verschiedenen Kräften P_1 und P_2 erteilt werden?

Antwort: Direkt wie die letzteren, es gilt also die Proportion

$$p_1 : p_2 = P_1 : P_2.$$

123. Wie verhalten sich dagegen die Beschleunigungen, welche ein und dieselbe Kraft bei zwei verschiedenen Massen M_1 und M_2 erzeugt?

Antwort: Umgekehrt, wie die letzteren, sodass die Proportion besteht

$$p_1 : p_2 = M_2 : M_1.$$

124. Wie verhalten sich endlich zwei Kräfte P_1 und P_2, wenn die erstere einer Masse M_1 die Beschleunigung p_1 und die letztere einer Masse M_2 die Beschleunigung p_2 beibringt?

Antwort: Wie die Produkte aus Masse und Beschleunigung, also nach der Proportion

$$P_1 : P_2 = M_1 p_1 : M_2 p_2.$$

§ 38.

Einführung von Kraft und Masse in die Bewegungsformeln. Bewegungsgrösse, Antrieb.

Wir stellen uns vor, dass auf einen bisher in Ruhe befindlichen Körper von der Masse M eine bestimmte Kraft P einwirkt. Dann bewegt sich dieser Körper nach Formel 24 mit der Beschleunigung

$$p = \frac{P}{M} \quad \text{. . . . . } I.$$

und besitzt laut Formel 10 in § 12 nach t Sekunden die Geschwindigkeit

$$v = p\,t. \quad \text{. . . . . } II.$$

Mit Einsetzung des Wertes von p aus I in II ergiebt sich

$$v = \frac{P}{M}t \quad \text{. . . . . } III.$$

und hieraus

$$Mv = Pt. \quad \text{. . . . . } (25)$$

Die linke Seite dieser Gleichung, also das Produkt aus der Masse M eines Körpers und seiner Geschwindigkeit v, heisst die **Bewegungsgrösse des Körpers**, während das Produkt aus der Kraft P und derjenigen Zeit t, welche P brauchte, um der Masse M vom Ruhezustande aus die Geschwindigkeit v zu erteilen, der **Antrieb der Kraft** genannt wird. Die obige Formel enthält daher den Satz: Die Bewegungsgrösse einer mit der Geschwindigkeit v fortschreitenden Masse M ist gleich dem Antrieb jener Kraft P, welche in t Sekunden der Masse M die Geschwindigkeit v mitzuteilen imstande war.

Verfolgen wir einmal die vorstehenden allgemeinen Ausführungen an einem besonderen Fall, indem wir annehmen, dass auf einen Körper mit dem Gewichte $G = 98{,}1\ kg$, also mit der Masse $M = \frac{G}{g} = \frac{98{,}1}{9{,}81} = 10$ die Kraft $P = 5\ kg$ zwei Minuten lang einwirkt.

Dann ist nämlich die Bewegungszeit $t = 120''$ und folglich der Antrieb der Kraft P

$$\boldsymbol{P\,t} = 5 \cdot 120 = \mathbf{600\ kg.}$$

Andererseits ergiebt sich die durch P hervorgerufene Beschleunigung

$$p = \frac{P}{M} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}\ m,$$

daraus weiter die Endgeschwindigkeit

$$v = p\,t = \frac{1}{2} \cdot 120 = 60\ m$$

und demnach die Bewegungsgrösse unseres Körpers

$$\boldsymbol{M\,v} = 10 \cdot 60 = \mathbf{600\ kg,}$$

sodass die Übereinstimmung zwischen $M\,v$ und $P\,t$ ersichtlich ist.

§ 39.

Arbeitsfähigkeit einer bewegten Masse.

In der Zeit t treibt aber die Kraft P die Masse M durch einen Weg, welcher nach Formel 11 in § 12

$$s = \frac{p}{2}\,t^2$$

ist. Setzen wir jetzt hierin aus I des vorigen Paragraphen

$$p = \frac{P}{M}$$

und zugleich aus 25

$$t = \frac{M v}{P},$$

so entsteht

$$s = \frac{P}{2 M} \cdot \frac{M^2 v^2}{P^2} = \frac{M v^2}{2 P}$$

und hieraus durch Multiplikation mit P:

$$\boldsymbol{P s = \frac{M}{2} v^2}, \quad \ldots \ldots \quad \textbf{(26)}$$

worin P Kilogramme, dagegen s und v Meter bedeuten.

Die linke Seite der vorstehenden Gleichung stellt das Produkt aus der Kraft P und dem vom Angriffspunkte der letzteren zurückgelegten Weg s, mithin diejenige mechanische Arbeit dar, welche die Kraft P leistete, indem sie einen Körper von der Masse M durch den Weg s getrieben und ihm die Geschwindigkeit v erteilt hat, eine Arbeit, welche der Körper vermöge seiner Trägheit jederzeit wieder verrichtet, sobald er durch Widerstände irgend welcher Art in den Zustand der Ruhe zurückgeführt wird.

Diese Fähigkeit eines bewegten Körpers, eine ganz bestimmte mechanische Arbeit zu leisten, welche wir seine Arbeitsfähigkeit oder sein Arbeitsvermögen*) nennen wollen, erhält man also zahlengemäss, wenn man die halbe Masse des Körpers mit dem Quadrat seiner Geschwindigkeit multipliziert.

Hat beispielsweise ein beladener Eisenbahnwagen, welcher sich in einem bestimmten Augenblicke mit einer Geschwindigkeit von *7 m* bewegt, ein Gewicht von *6000 kg*, so ist seine Masse

$$M = \frac{G}{g} = \frac{6000}{9,81} = 611,62$$

---

*) Nicht gerade glücklich wurde für diesen Begriff der Name „lebendige Kraft" gewählt, eine Benennung, welche sich leider immer noch in den meisten Lehrbüchern und technischen Zeitschriften vorfindet und ganz dazu angethan ist, bei Anfängern unklare Vorstellungen zu erwecken; denn $\frac{M}{2} v^2$ ist keine Kraft, sondern eine mechanische Arbeit, eine gewisse Anzahl von Meterkilogrammen!

und daher sein **Arbeitsvermögen**

$$A_v = \frac{M}{2} v^2 = 305{,}81 \cdot 49 = \mathbf{14984{,}69\ mkg},$$

d. h.: dieser Wagen kann auf Grund seines Beharrungsvermögens eine mechanische Arbeit von beinahe *15000 mkg* leisten, also z. B. einen Widerstand von *1000 kg* oder *20* Centnern lediglich infolge der Trägheit auf einer Strecke von fast *15 m* überwinden.

§ 40.

Übungsbeispiele.

125. Eine *7 kg* wiegende Granate verlässt den Lauf des Geschützes mit *720 m* Geschwindigkeit; man bestimme die Arbeitsfähigkeit dieser Granate.

Resultat: *184954* Meterkilogramme.

126. Wie hoch würde diese Granate vermöge ihrer Arbeitsfähigkeit im luftleeren Raume steigen, wenn der Geschützlauf vertikal nach oben gerichtet wird?

Lösung: Ist die Steighöhe x Meter, so folgt aus $7x = 184954$, $x = 26422$.

127. Wie gross ist das Arbeitsvermögen eines *10 kg* schweren und mit *10 m* Geschwindigkeit fortschreitenden Körpers?

Antwort: *50,97 mkg.*

128. Welches ist das Arbeitsvermögen eines Körpers vom Gewichte G, welcher im luftleeren Raume von der Ruhe aus t Sekunden lang gefallen ist?

Antwort: $L = \frac{1}{2} G g t^2$ Meterkilogramme, wenn G in Kilogrammen angegeben ist.

129. Ein Körper von *39,24 kg* Gewicht gelangt mit *24 m* Geschwindigkeit auf eine horizontale Eisfläche und legt auf letzterer ohne jede weitere bewegende Kraft noch einen Weg von *1600* Metern zurück. Wie hoch berechnet sich hieraus der durchschnittliche Bewegungswiderstand?

Lösung: Aus dem Umstande, dass die zur Überwindung der Bewegungshindernisse (Reibung und Luftwiderstand) W nötige Arbeit gleich dem Arbeitsvermögen des Körpers sein muss, ergiebt sich $W = 0{,}72\ kg$.

130. Wie weit würde aber dieser Körper nur kommen, wenn der Bewegungswiderstand fortwährend *2 kg* betrüge?

Antwort: *576* Meter.

131. Man bestimme das Arbeitsvermögen eines Schwungradkranzes, für welchen der äussere, resp. innere Durchmesser D, resp. d Decimeter und die Breite b Decimeter betragen, wenn die Umlaufszahl pro Minute n ist und das spezifische Gewicht des Eisens mit γ bezeichnet wird.

Auflösung: Der Kranz des Schwungrades ist ein Hohlcylinder und mithin sein Volumen

$$V = \frac{1}{4} (D^2 - d^2)\, b\, \pi \text{ Kubikdecimeter,}$$

sein Gewicht

$$G = \frac{1}{4} (D + d)(D - d)\, b\, \gamma\, \pi \text{ Kilogramme}$$

und seine Masse

$$M = \frac{\pi \gamma}{4 g} (D + d)(D - d)\, b.$$

Andererseits ist die mittlere Umfangsgeschwindigkeit des Radkranzes

$$v = \frac{n \frac{D + d}{2}}{19{,}1} = \frac{n (D + d)}{38{,}2} \text{ Decimeter}$$

oder

$$v = \frac{n (D + d)}{382} \text{ Meter}$$

und mithin ergiebt sich die Arbeitsfähigkeit des Schwungradkranzes

$$A = \frac{M}{2} v^2 = \frac{\pi \gamma}{8 g} (D + d)(D - d)\, b \frac{n^2 (D + d)^2}{145924}$$

oder weil der Zahlenfaktor

$$\frac{\pi}{8 \cdot 145924 \cdot g} = 0{,}0000002743$$

ist:

$$A = 0{,}0000002743\, (D + d)^3 (D - d)\, n^2\, b\, \gamma \text{ Meterkilogramme,}$$

wobei, wie schon erwähnt, die Dimensionen D, d und b in Decimetern verstanden sind.

132. Welches ist das Arbeitsvermögen vom Ringe eines gusseisernen Schwungrades mit den Dimensionen $D = 52\,dm$, $d = 48\,dm$, $b = 2{,}8\,dm$, der Tourenzahl $n = 57{,}3$ und dem spezifischen Gewichte $\gamma = 7{,}3$?

Antwort: $A = 73633\, mkg$.

133. Wie lange würde dieses Schwungrad lediglich infolge seiner Trägheit einen Effekt von *16* Pferdestärken auszuüben imstande sein?

Antwort: *1* Minute *1,36* Sekunden.

134. Es soll das Arbeitsvermögen eines schmiedeeisernen Schwungradringes für $D = 32$, $d = 29$, $b = 2$, $n = 50$ und $\gamma = 7{,}8$ berechnet werden.

Antwort: $A = 7284{,}5$ *mkg.*

135. Mit wie viel Pferdestärken würde der Schwungradkranz der vorigen Aufgabe auf Grund des Beharrungsvermögens eine Minute lang arbeiten?

Antwort: Mit circa *1,6 PS.*

§ 41.

Satz von der Erhaltung der Arbeit.

Wirkt auf einen Körper mit der Masse M, welcher schon eine Geschwindigkeit von c Metern besitzt, in der Richtung und im Sinne seiner Bewegung eine einzige unveränderliche Kraft von P Kilogrammen ein, so erteilt die letztere dem ersteren eine Beschleunigung

$$p = \frac{P}{M},$$

und es hat folglich jener Körper nach t Sekunden die Geschwindigkeit

$$v = c + p\,t = c + \frac{P}{M} \cdot t$$

erlangt, sowie den Weg

$$s = c\,t + \frac{p}{2}\,t^2 = c\,t + \frac{P}{2\,M}\,t^2$$

zurückgelegt. Setzt man nun aus der vorletzten Beziehung

$$t = (v - c)\,\frac{M}{P}$$

in die letzte Gleichung für s ein, so ergiebt sich

$$s = c\,(v - c)\,\frac{M}{P} + \frac{P}{2\,M}\,(v - c)^2\,\frac{M^2}{P^2}$$

und hieraus nach kurzer Rechnung

$$Ps = \frac{M}{2} v^2 - \frac{M}{2} c^2 = \frac{M}{2} (v^2 - c^2). \quad \cdot \quad \cdot \quad (27)$$

In der linken Seite der vorstehenden Gleichung erkennen wir jetzt diejenige mechanische Arbeit, welche die Kraft P leisten musste, um die Trägheit des Körpers mit der Masse M auf der Wegstrecke s zu überwinden, oder, um denselben von der Geschwindigkeit c auf die Geschwindigkeit v zu bringen, und die rechte Seite stellt die Differenz der beiden Arbeitsfähigkeiten dar, welche dem Körper am Ende und am Anfange der Bewegung innewohnen, das ist die Zunahme des Körpers an Arbeitsvermögen.

Wirkt also nur eine Kraft beschleunigend auf einen Körper, so ist ihre mechanische Arbeit gleich der im letzteren erzeugten Arbeitsfähigkeit.

Nehmen wir ferner an, dass jetzt, wo der Körper die Geschwindigkeit v besitzt, an die Stelle der bewegenden Kraft P ein Widerstand W tritt, so entsteht offenbar eine verzögerte Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit v und der Verzögerung

$$p' = \frac{W}{M},$$

und mithin erhält man die Endgeschwindigkeit c und den nach t' Sekunden zurückgelegten Weg des Körpers mittels der beiden Beziehungen

$$c = v - p' t' \text{ und } s' = c t' - \frac{p'}{2} t'^2.$$

Durch Elimination von p' und t' aus den vorstehenden drei Gleichungen ergiebt sich nach einer der vorigen analogen Rechnung

$$W s' = \frac{M}{2} (v^2 - c^2).$$

Weil Ws' diejenige mechanische Arbeit darstellt, welche unser Körper vermöge seiner Arbeitsfähigkeit bei Überwindung des Bewegungswiderstandes W geleistet hat, und weil die rechten Seiten der letzten und 27. Formel übereinstimmen, demnach auch

$$Ps = Ws'$$

ist, so gilt der Satz: Die mechanische Arbeit (Ps), welche ein Körper aufnimmt, indem ihn eine Kraft P aus einer kleineren Geschwindigkeit (c) auf eine grössere Geschwindigkeit (v) bringt, wird von diesem Körper stets wieder produziert, wenn ihn irgend ein Widerstand W nötigt, auf jene kleinere Geschwindigkeit (c) zurückzugeben.

Dieser Satz kann auch noch auf folgende Art entwickelt werden: Die Formel 27 besitzt immer Geltung, ob nun die Anfangsgeschwindigkeit c kleiner oder grösser als die Endgeschwindigkeit v sei.

Wenn zunächst die Anfangsgeschwindigkeit kleiner als die Endgeschwindigkeit ist, demnach eine beschleunigte Bewegung vorliegt, so wird die Differenz $\frac{M}{2} v^2 - \frac{M}{2} c^2$, also auch Ps positiv, die Kraft wirkt hier im Sinne der Bewegung und der Körper hat an Arbeitsvermögen gewonnen.

Ist dagegen die Anfangsgeschwindigkeit grösser wie die Endgeschwindigkeit, so wird

$$Ps = \frac{M}{2} (v^2 - c^2)$$

negativ, es findet folglich eine gleichförmig verzögerte Bewegung statt und die Kraft wirkt der Bewegung entgegengesetzt. Der Körper hat dann auf dem durchlaufenen Wege an Arbeitsfähigkeit verloren.

Gewinn und Verlust sind aber einander gleich, sobald die Werte von M, c und v in beiden Fällen miteinander übereinstimmen.

Schliesslich folgt aus 27 für den besonderen Fall $v = o$, d. h., wenn der Körper zum Stillstand kommt,

$$Ps = -\frac{1}{2} M c^2.$$

Wenn daher der Körper durch einen Widerstand von einer bestimmten Geschwindigkeit in Ruhe übergeführt wird, so ist die ausgegebene mechanische Arbeit gleich dem Produkte aus der halben Masse des Körpers und dem Quadrat der Anfangsgeschwindigkeit.

§ 42.

Übungsbeispiele.

136. Wie viel mechanische Arbeit ist erforderlich, um einen *8 kg* schweren Körper von *4* auf *7 m* Geschwindigkeit zu bringen?

Antwort: Eine Arbeit von *13,456 mkg.*

137. In welcher Zeit bringt eine Kraft von *0,1 kg* einen Körper von *10 kg* Gewicht von *7* auf *17 m* Geschwindigkeit?

Antwort: In einer Minute *42* Sekunden, allgemein in $t = \frac{v - c}{g} \cdot \frac{G}{P}$ Sekunden.

138. Welche Arbeit verrichtet ein Schwungrad von *10000 kg* Gewicht vermöge seiner Trägheit, wenn die Umfangsgeschwindigkeit desselben von *15* auf *5* Meter heruntergeht?

Antwort: *101936 mkg.*

139. Wie gross ist der Widerstand, welcher durch genannte Arbeit auf *5* Meter Länge überwunden wird?

Antwort: *20387,2 kg.*

140. Ein beladener Eisenbahnwagen möge ein Gewicht von *4000* Kilogramm haben; derselbe bewege sich in einem bestimmten Momente mit einer Geschwindigkeit von *6* Metern auf einer horizontalen Bahnstrecke vorwärts. Eine sich immer gleich bleibende Kraft P bringt denselben während einer gewissen Zeit in eine Geschwindigkeit von *12 m.* Wie gross ist erstens die von P in diesem Zeitraume verrichtete und dem Wagen mitgeteilte mechanische Arbeit A und zweitens der zurückgelegte Weg s, wenn $P = 200$ *kg* angenommen wird?

Antwort: $A = 22018$ *mkg* und $s = 110{,}09$ *m.*

141. Ein Wagenzug von *800000* Kilogramm bewegt sich in einem bestimmten Moment mit einer Geschwindigkeit von *15* Metern. Von diesem Momente an hört der Dampf auf zu arbeiten, und der Zug wird sich selbst überlassen. Nach dem Verlaufe einer gewissen Zeit hat der Wagenzug vermöge der Reibung nur noch eine Geschwindigkeit von *2* Metern. Wie gross ist die während dieser Zeit abgegebene mechanische Arbeit A und wie gross der Reibungswiderstand W, wenn noch *2000 m* zurückgelegt wurden?

Antwort: $A = 9011214$ *mkg* und $W = 4505{,}6$ *kg.*

§ 43.

Wirkungsweise der Schwungräder.

Eine direkte Anwendung des letzten Satzes und damit zugleich eine Gelegenheit, den Satz von der Erhaltung der Arbeit anschaulich zu machen, bietet die Wirkungsweise eines Schwungrades dar.

Bei vielen Maschinen ist nämlich entweder die bewegende Kraft, z. B. bei den Dampfmaschinen mit Expansion, oder der zu überwindende Widerstand, wie bei Metall- oder Holzbearbeitungsmaschinen, bei manchen beides zugleich veränderlich; durch die infolgedessen eintretende ungleichförmige Bewegung würden Stösse hervorgerufen werden und letztere wieder nicht nur Beschädigungen der Maschinenteile, sondern auch Arbeitsverluste verursachen.

Um diese Nachteile zu vermeiden, bzw. zu vermindern, sucht man einen gleichmässigen Gang der Maschine zu erzielen und erreicht denselben wenigstens annähernd, wenn man auf einer mit grosser Tourenzahl laufenden und in der Nähe der zu regulierenden Kraft gelegenen Rotationswelle ein Rad mit verhältnismässig grossem Durchmesser und schwerem guss- oder schmiedeeisernen Kranze, ein sogenanntes Schwungrad, anbringt. Bei überschüssiger Kraft wird in diesem Schwungrad mehr Geschwindigkeit und hierdurch auch mehr Arbeitsvermögen erzeugt, letzteres aber wieder in Nutzarbeit umgesetzt, sobald und so lange die Intensität der Widerstände diejenige der bewegenden Kraft übertrifft. Weil aber das Schwungrad bei seiner bedeutenden Masse und hohen Tourenzahl schon ziemliche Quantitäten Arbeit aufnehmen und abgeben kann, ohne seine Geschwindigkeit wesentlich zu ändern und weil andererseits die Intensitätsschwankungen der bewegenden Kraft und des Widerstandes in der Regel nur von kurzer Dauer sind, so leuchtet ein, dass durch das Schwungrad ein nahezu gleichförmiger Gang der Maschine herbeigeführt werden muss.

Man könnte das Schwungrad nicht unpassend mit einem Gefässe vergleichen, in welchem sich ein bedeutendes Quantum von Arbeitsvermögen befindet und welchem man daher schon ziemliche Mengen mechanischer Arbeit zuführen oder entnehmen kann, ohne es dem Inhalte sonderlich anzumerken.

Selbstverständlich wird für solche Maschinen ein Schwungrad entbehrlich sein, in welchen schon sehr schwere Räder oder Scheiben mit hinreichender Umfangsgeschwindigkeit laufen und demnach das Schwungrad ersetzen; so wirken beispielsweise die Läufer einer Mahlmühle als Schwungräder.

Aber nicht bloss als Egalisator, sondern auch lediglich als Arbeitsansammler kann das Schwungrad dienen. Wenn nämlich eine gegebene Arbeitskraft zur Überwindung eines bestimmten und sehr bedeutenden Widerstandes nicht ausreicht, wie dies z. B. bei Walz- und Prägwerken vorkommt, so kann man jene Kraft zunächst nur auf das Schwungrad wirken lassen und hierdurch in letzterem so viel mechanische Arbeit aufspeichern, als zur Überwindung des vorhandenen Widerstandes erforderlich ist. Auch in diesem Falle trifft der Vergleich des Schwungrades mit einem Behälter von Arbeitsvermögen noch vollkommen zu, nur wird hier das Gefäss gänzlich oder doch nahezu entleert, ehe man es von neuem wieder anfüllt.

§ 44. Gleichförmigkeit des Schwungrades.

Bezeichnet man die Zunahme an Arbeitsfähigkeit, welche ein Schwungrad erfährt, indem seine Umfangsgeschwindigkeit von c auf v wächst, mit A, so gilt nach No. 27 die Beziehung

$$A = \frac{M}{2}(v^2 - c^2),$$

woraus folgt

$$A = M(v - c)\frac{v + c}{2},$$

oder, wenn man die mittlere Schwungradgeschwindigkeit

$$\frac{v + c}{2} = \gamma$$

setzt und durch $A(v - c)$ dividiert:

$$\frac{1}{v - c} = \frac{M\gamma}{A}$$

und hieraus nach Multiplikation mit γ:

$$\frac{\gamma}{v - c} = \frac{M\gamma^2}{A}. \quad \ldots\ldots \quad (28)$$

Die linke Seite dieser Gleichung, d. i. das Verhältnis zwischen der mittleren und der Differenz aus der grössten und kleinsten Umfangsgeschwindigkeit des Schwungrades, heisst der Gleichförmigkeitsgrad des letzteren und wird gewöhnlich mit δ bezeichnet. Wie uns die Formel 28 sagt, ist der Gleichförmigkeitsgrad direkt proportional der Masse M des Schwungradkranzes und dem Quadrate seiner mittleren Geschwindigkeit γ, dagegen indirekt proportional der Arbeitsdifferenz A, welche das Rad erleidet.

Nach Grove ist zu nehmen
bei Hammer- und Stampfwerken . . . . . $\delta = 5$,
„ Pumpen und Schneidemühlen . . . . . $\delta = 20$ bis 30,
„ Webereien und Papiermaschinen . . . . $\delta = 40$,
„ Mahlmühlen . . . . $\delta = 50$,
„ Spinnereien mit niedrigen Garnnummern . . $\delta = 50$ bis 60,
„ „ „ hohen „ . . $\delta = 100$.

Für gewöhnliche Dampfmaschinen wählt man
bei Riemenbetrieb . . . . $\delta = 35$ und
„ Zahnräderbetrieb . . . . $\delta = 50$.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass $\frac{1}{\delta}$ der Ungleichförmigkeitsgrad des Schwungrades genannt wird und dass unter γ, c und v auf der linken Seite von Formel 28 auch die entsprechenden Umfangsgeschwindigkeiten des Kurbelzapfens verstanden werden dürfen.

§ 45.
Übungsbeispiele.

142. Man gebe den Gleichförmigkeitsgrad eines Schwungrades an, für welches die kleinste und die grösste Geschwindigkeit $13{,}2$ und $12{,}8\ m$ sind.

Lösung: Aus $v = 13{,}2$ und $c = 12{,}8$ folgt $\gamma = 13$ und mithin der Gleichförmigkeitsgrad $\delta = \frac{\gamma}{v - c} = 32{,}5$.

143. Das Schwungrad einer Dampfmaschine soll mit der durchschnittlichen Umfangsgeschwindigkeit $\gamma = 10\ m$ laufen und den Gleichförmigkeitsgrad $\delta = 50$ besitzen. Man bestimme die

äussersten Grenzen c und v, zwischen welchen die Umfangsgeschwindigkeit schwankt.

Resultate: $c = 9{,}9\ m$ und $v = 10{,}1\ m$.

144. Ebenso für $\gamma = 14\ m$ und $\delta = 35$.

Resultate: $c = 13{,}8\ m$ und $v = 14{,}2\ m$.

145. Desgleichen für $\gamma = 20\ m$ und $\delta = 5$.

Resultate: $c = 18\ m$ und $v = 22\ m$.

146. Diese Aufgabe allgemein zu lösen.

Resultate: $c = \gamma\left(1 - \frac{1}{2\delta}\right)$ und $v = \gamma\left(1 + \frac{1}{2\delta}\right)$.

147. Der Ring eines Schwungrades, welcher eine mittlere Geschwindigkeit $\gamma = 12\ m$ und den Gleichförmigkeitsgrad $\delta = 40$ besitzen soll, nimmt periodisch eine Arbeit von $A = 720\ mkg$ auf, um dieselbe sofort wieder abzugeben. Welches Gewicht muss nun dieses Schwungrad erhalten?

Antwort: $G = \frac{A\,g\,\delta}{\gamma^2} = 1962\ kg$.

148. Die Umfangsgeschwindigkeit eines $2943\ kg$ schweren Schwungrades schwankt zwischen $9{,}7$ und $10{,}1\ m$. Man soll den Gleichförmigkeitsgrad δ und diejenige Arbeitsgrösse A ermitteln, welche das Schwungrad abwechselnd aufnimmt und wieder abgiebt.

Resultate: $\delta = 24{,}75$ und $A = 1188\ mkg$.

§ 46.

Vermischte Beispiele und Aufgaben über Kräfte und deren Leistungen.

149. Ein Tourist, welcher samt Kleidern und Gepäck *80* Kilogramme wiegt, ersteigt in *5* Stunden einen Berg von *1600* Meter Höhe. Welchen Effekt muss derselbe durchschnittlich ausüben, wenn man annimmt, dass der Körper bei jedem Schritte um $^1/_8$ der vertikalen Erhebung zurücksinkt?

Antwort: Einen mittleren Effekt von *8* Meterkilogrammen.

150. Eine Wasserpumpe macht $z = 25$ Hübe in der Minute und liefert bei jedem Hube $q = 40$ Liter auf eine Höhe von $H = 9$ Meter. Wie viel Pferdestärken sind zum Betriebe nötig, wenn durch Nebenhindernisse $^1/_4$ der Nutzarbeit verloren geht?

Antwort: $N = \frac{q\,H\,z}{3600} = 2{,}5\ PS.$

151. Wie gestaltet sich aber das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn statt des Wasserquantums q der Durchmesser d und die Hubhöhe h des Kolbens, und zwar beide in Metern, gegeben sind?

Antwort: $N = 0{,}218\, d^2\, h\, H\, z$ Pferdekräfte.

152. Man löse die vorige Aufgabe für die speziellen Zahlenwerte $d = 0{,}3$, $h = 1$, $H = 10$, $z = 25$.

Resultat: $N = 4{,}9\ PS.$

153. In einem gegen den Horizont geneigten Kanal ist der normale Querschnitt des einfliessenden Wassers *2* Quadratmeter und die Geschwindigkeit des letzteren an der Oberfläche *1,09 m*, während die Oberflächengeschwindigkeit des Wassers am Ende des Kanales *5 m* beträgt. Wie viel Pferdestärken sind in dem aus dem Kanale kommenden Wasser enthalten, wenn die mittlere Geschwindigkeit eines Wasserlaufes nahezu $^9/_{10}$ von derjenigen an der Oberfläche ist?

Lösung: Es ist das Gewicht des am oberen Kanalende per Sekunde zufliessenden Wasserquantums $G = 2 \cdot 1{,}09 \cdot 0{,}9 \cdot 1000 = 1962\ kg$, folglich dessen Masse $M = 200$. Andererseits ist die mittlere Geschwindigkeit des Wassers am unteren Ende $v = 5 \cdot 0{,}9 = 4{,}5\ m$ und mithin nach No. 25 die sekundliche Arbeit $= 100 \cdot 4{,}5 \cdot 4{,}5 = 2025\ mkg$ oder $\boldsymbol{N = 27\ PS.}$

154. Auf die *45 dm* langen und *10,9 dm* breiten Schaufeln eines Schiffmühlenrades drückt Wasser mit *1,2 m* Geschwindigkeit. Wenn nun dieses Rad eine Nutzarbeit von *1,5* Pferdestärken liefert, wie hoch berechnet sich dann der Wirkungsgrad des ersteren?

Auflösung: Auf die Schaufeln wirkt in jeder Sekunde ein Quantum Wasser vom Gewichte

$$G = 45 \cdot 10{,}9 \cdot 12 = \mathbf{5886\ kg},$$

mithin von der Masse

$$M = \frac{G}{g} = \frac{5886}{9{,}81} = \mathbf{600}$$

und dem Arbeitsvermögen

$$\frac{M}{2} v^2 = 300 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2 = \mathbf{432\ mkg.}$$

Folglich besitzt das Wasser vermöge seiner Trägheit eine Arbeitskraft von

$$N = \frac{432}{75} = \mathbf{5{,}76\ PS}$$

und es ergiebt sich der Wirkungsgrad des Schiffmühlenrades

$$\eta = \frac{1{,}5}{5{,}76} = \mathbf{0{,}26.}$$

155. Die vier Flügel einer Windmühle haben zusammen eine Fläche von *100 qm*. Wie viel Nutzarbeit werden dieselben bei einer Windgeschwindigkeit von *6 m* produzieren, wenn der Wirkungsgrad $^1/_2$ und die Luft *800* mal leichter als Wasser ist?

Lösung: Ein Kubikmeter Luft wiegt $\frac{1000}{800} = \frac{5}{4}\,kg$. In einer Sekunde wirken auf die Windmühlenflügel $100 \cdot 6 = 600\ cbm$ mit dem Gewichte $600 \cdot \frac{5}{4} = 750\ kg$ und der lebendigen Kraft $\frac{750}{2\,g}\ 36\ mkg$. Demnach ist die Arbeitskraft des Windes

$$N = \frac{750 \cdot 18}{75 \cdot g} = \frac{180}{g} = \mathbf{18{,}346\ PS}$$

und das Windrad liefert *9,2* Pferdestärken Nutzarbeit.

156. Man löse die vorige Aufgabe unter der Bedingung, dass die Fläche der Flügel f Quadratmeter, die Geschwindigkeit des Windes v Meter, das Gewicht des Kubikmeters Luft k Kilogramm betragen und der Wirkungsgrad η sei.

Resultat: Der Nutzeffekt beträgt $\frac{f\,k\,v^3}{150\,g}\,\eta$ Pferdestärken.

157. Jemand schleudert einen Körper von $G = 1{,}4\ kg$ Gewicht $h = 9\ m$ vertikal aufwärts, indem er ihn auf der Strecke $s = 0{,}6\ m$ unausgesetzt forttreibt. Mit welcher Stärke P hat die Hand auf den Körper gedrückt?

Lösung: Aus $P\,s = G\,h$ folgt $P = \frac{G\,h}{s} = 21\ kg$.

158. An den Enden eines über eine Rolle gelegten Fadens hängen die beiden Gewichte G_1 und G_2, von welchen $G_1 > G_2$. Welches ist die Beschleunigung p der entstehenden Bewegung unter der Voraussetzung, dass vom Eigengewicht des Fadens, sowie von der Trägheit der Rolle, ferner von der Reibung und vom Luftwiderstande abgesehen wird?

Auflösung: Hier ist die bewegende Kraft $P = G_1 - G_2$ und das Gewicht der bewegten Masse $G = G_1 + G_2$, mithin ist nach No. 23

$$(G_1 - G_2) : (G_1 + G_2) = p : g, \text{ w. f. } p = \frac{G_1 - G_2}{G_1 + G_2} \cdot g.$$

159. Wie gross wird beispielsweise die Beschleunigung, wenn die beiden Gewichte *15,5* und *14,5 kg* betragen?

Antwort: *0,327 m.*

Viertes Kapitel.

Das vierte Grundgesetz. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte.

§ 47.

Das Grundgesetz von der Unabhängigkeit der Bewegungen.

Das vierte und letzte allgemeine Grundgesetz der Mechanik lautet: Wirken auf einen Körper zwei Bewegungsursachen, so ist die Ortsveränderung des ersteren die nämliche, ob nun die letzteren zugleich, oder aber nacheinander auf den Körper übertragen werden; mit anderen Worten: die eine Bewegung erfolgt unabhängig von der anderen.

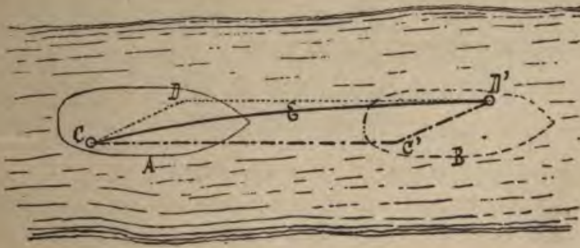


Fig. 17.

Um von dem Inhalte dieses Satzes eine richtige Vorstellung zu gewinnen, nehmen wir an, es bewege sich ein Schiff von *A* nach *B* (Fig. 17) und schräg über das Verdeck wandere eine Person vom Punkte *C* nach dem Punkte *D*. Auf Grund des obigen Erfahrungsgesetzes wird dann die Person unter allen Umständen an die Stelle *D'* gelangen — ganz gleichgiltig, ob erst das Schiff und dann die Person, oder zunächst die letztere und hierauf das erstere, oder endlich, ob beide gleichzeitig ihre bezüglichen Wege zurücklegen.

Man sieht aber wohl, dass nur von der vollendeten Ortsveränderung die Rede ist, nicht aber von dem Wege, auf dem sie eintritt; denn dieser ist in allen drei Fällen ein anderer: im ersten $C\,C'\,D'$, im zweiten $C\,D\,D'$ und im dritten eine zwischen $C\,C'\,D'$ und $C\,D\,D'$ liegende Linie $C\,E\,D'$.

Wenn übrigens ein Punkt P gleichzeitig zwei geradlinige Bewegungen, z. B. von A nach B und von A nach C (Fig. 18) ausführt, so erhält man seine wirkliche Bahn, indem man die Linie $A\,C$ parallel zu sich selbst mit A auf $A\,B$ nach dem ersten und zugleich den Punkt P in der Beweglichen $A\,C$ nach dem zweiten Bewegungsgesetze fortschreiten lässt. Sind nun die vom Punkte in den beiden Bewegungsrichtungen $A\,X$ und $A\,Y$ in einer bestimmten Zeit t zurückgelegten Wege gleich $A\,B$, resp. $A\,C$, so befindet sich der erstere nach dieser Zeit offenbar im vierten Eckpunkte D eines Parallelogramms mit den Seiten $A\,B$ und $A\,C$.

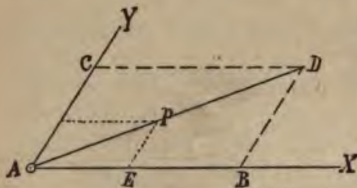


Fig. 18.

Betreffs der Form des Weges auf welchem unser Punkt von A nach D gelangt, beschränken wir uns auf den für später wichtigen Fall, dass beide Einzelbewegungen gleichförmig beschleunigt sind und von der Ruhe aus erfolgen. Bezeichnen wir die Beschleunigungen in den Richtungen $A\,X$ und $A\,Y$ mit p_1 und p_2, so sind die in t Sekunden durchlaufenen, entsprechenden Wege

$$A\,B = \frac{p_1}{2}\,t^2 \text{ und } B\,D = \frac{p_2}{2}\,t^2,$$

woraus durch Division beider folgt

$$A\,B : B\,D = p_1 : p_2.$$

Nach einer beliebigen Zwischenzeit τ ist aber der Punkt P an einer Stelle mit den zugehörigen Wegen

$$A\,E = x = \frac{p_1}{2}\,\tau^2 \text{ und } E\,P = y = \frac{p_2}{2}\,\tau^2,$$

woraus sich ergiebt

$$A\,E : E\,P = p_1 : p_2.$$

Aus den beiden vorstehenden erhellt aber die dritte Proportion

$$A\,E : E\,P = A\,B : B\,D$$

und hieraus, dass P auf der geraden Linie $A\,D$ liegt, dass also

die thatsächliche Bewegung des Punktes P auf der **Diagonale** des **Parallelogramms** $A\,B\,D\,C$ vor sich geht.

§ 48.

Geometrische Darstellung der Kräfte. Zusammensetzung derselben im allgemeinen.

Jede Kraft kann graphisch dargestellt werden als eine Strecke, indem man die Grösse, die Richtung und den Angriffspunkt der ersteren ausdrückt oder geometrisch versinnlicht durch die Länge, die Richtung und einen Endpunkt der letzteren; die Seite, nach welcher die Kraft wirkt, bezeichnet man durch eine an die Strecke oder deren Verlängerung gesetzte Pfeilspitze.

Bei der Darstellung verschiedener Kräfte durch begrenzte gerade Linien kommt es zunächst darauf an, eine passende Länge, welche die Krafteinheit (das Kilogramm) ausdrückt, zu wählen. Diese Länge trägt man auf der Richtungslinie jeder gegebenen Kraft ebenso oft ab, als mit wieviel Kilogramm Druck (oder Zug) die betreffende Kraft wirken soll und erhält hierdurch Strecken, welche jene gegebenen Kräfte veranschaulichen und deren Längen sich genau so verhalten wie die Intensitäten der durch sie repräsentierten Kräfte, folglich aber auch (nach § 34) wie die Beschleunigungen, welche die Kräfte — jede für sich — dem angegriffenen Körper erteilen und mithin zugleich wie die Wege, welche der Körper unter dem Einflusse jeder einzelnen Kraft in einer bestimmten Zeit durchlaufen würde.

Wenn z. B. die drei Kräfte $P_1 = 2\,kg$, $P_2 = 1\,kg$ und $P_3 = 4\,kg$ den Körper K (Fig. 19) in den Punkten A_1, A_2 und A_3 angreifen sollen, so zieht man durch letztere drei Gerade, welche die Richtungen der Kräfte angeben, und macht nun $A_1\,C_1 = 2$, $A_2\,C_2 =$ und $A_3\,C_3 = 4$ Längeneinheiten, z. B. Centimeter. Dann sind die Kräfte P_1, P_2, P_3 durch die Strecken $A_1\,C_1$, $A_2\,C_2$, $A_3\,C_3$ **geometrisch** versinnlicht, und wenn diese drei **Kräfte** nacheinander auf den Körper K einwirkten, so würde letzterer drei verschiedene Beschleunigungen erfahren, welche sich wie

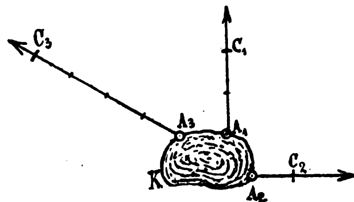


Fig. 19

$$A_1\,C_1 : A_2\,C_2 : A_3\,C_3 = 2 : 1 : 4$$

verhielten. Nehmen wir ferner an, dass in einer gewissen Zeit, etwa in drei Sekunden, die Kraft P_1 den Körper von A_1 nach C_1 bewegt, so würde ihn in derselben Zeit P_2 von A_2 nach C_2 und P_3 von A_3 nach C_3 bringen.

Wirken nun mehrere Kräfte gleichzeitig und zwar zunächst auf nur einen Punkt *A* eines Körpers, so kann das Resultat im allgemeinen doch nur darin bestehen, dass dieser Körper während einer gewissen Zeit eine ganz bestimmte Ortsveränderung erfährt und da offenbar dieselbe Ortsveränderung in der nämlichen Zeit auch von nur einer Kraft erzielt werden kann, so ist es eine wichtige Aufgabe der Mechanik, diese letztere zu ermitteln.

Die einzelnen Kräfte heissen auch die Seitenkräfte oder Komponenten, die einzige Kraft, welche in gleicher Zeit dasselbe bewirkt, wie jene zusammengenommen, die Mittelkraft oder Resultante oder resultierende Kraft und die Aufgabe, die letztere aus den ersteren zu bestimmen, das Zusammensetzen der Kräfte.

§ 49.

Das Parallelogramm der Kräfte.

Die Resultante R von zwei Kräften P_1 und P_2, welche einen Körper im Punkte A angreifen und durch die Strecken AB, AC geometrisch dargestellt sind, wird ihrer Richtung und Grösse nach ausgedrückt durch die Diagonale AD desjenigen Parallelogramms $ABDC$ (Fig. 20), welches die beiden Linien $AB = P_1$ und $AC = P_2$ zu Seiten hat.

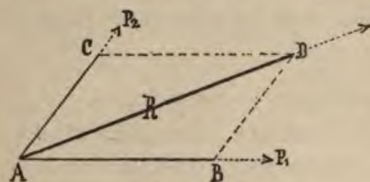


Fig. 20.

Die Richtigkeit dieses Gesetzes, welches gewöhnlich der Satz vom Parallelogramm der Kräfte genannt wird, kann durch folgende Betrachtungen dargethan werden: die Kraft P_1 für sich würde dem Körper eine geradlinige und gleichförmig beschleunigte Bewegung erteilen und ihn in irgend einer bestimmten Zeit t von A nach B treiben. Denkt man sich jetzt P_1 weg und dafür die andere Kraft P_2 wirkend, so wird abermals eine gleichmässig beschleunigte, geradlinige Bewegung hervorgerufen und auf Grund des vorigen Paragraphen der Körper während des gleichen Zeitraums t von B nach D geführt. Eine in umgekehrter Reihe hintereinander folgende Wirkung beider Kräfte würde bezüglich der Ortsveränderung zwar dasselbe Endresultat ergeben, nur würde der Körper einen anderen Weg

einschlagen, nämlich durch P_2 zunächst von A nach C und dann durch P_1 von C nach D gelangen.

Wenn aber nun schliesslich beide Kräfte zugleich dieselbe Zeit t hindurch wirksam sind, so muss nach § 47 der Punkt A die Diagonale $A\,D$ des Parallelogramms $A\,B\,D\,C$ durchlaufen, eine Bewegung, welche der Punkt auch dann genau ausführen würde, wenn nur eine, durch die Strecke $A\,D$ graphisch dargestellte Kraft t Sekunden lang wirken würde. Mithin drückt die Diagonale jedes Parallelogramms $A\,B\,D\,C$ die Resultierende R zweier Komponenten P_1 und P_2 aus, welche letztere durch die beiden im Anfangspunkte A der Diagonale zusammenstossenden Seiten $A\,B$ und $A\,C$ geometrisch dargestellt sind.

Hiernach kann man mit Leichtigkeit zwei auf einen Punkt A wirkende Seitenkräfte P_1 und P_2 mit Hilfe von Lineal und Zirkel zusammensetzen, indem man sie nach Richtung und Grösse als zwei in einem Punkte A zusammentreffender Strecken darstellt, letztere zu einem Parallelogramm ergänzt und durch A die Diagonale zieht, welche dann die gesuchte Mittelkraft von P_1 und P_2 repräsentiert.

Was die Ermittelung der Resultante R durch Rechnung anlangt, so kann dieselbe auf trigonometrischem Wege allgemein und ohne alle Schwierigkeiten erfolgen; hier wollen wir uns aber auf die Erledigung nur dreier, aber besonders wichtiger Spezialfälle beschränken:

Erstens. Sind die beiden Komponenten lotrecht zu einander, so ist das Kräfteparallelogramm ein Rechteck und folglich die Resultante als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten P_1 und P_2 nach dem Pythagoräischen Lehrsatz:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}. \quad \cdots \cdots \quad (29)$$

Zweitens. Lässt man den Winkel $C\,A\,B = \alpha$ zwischen den beiden Komponenten (Fig. 21) kleiner werden bis zur Null, so läuft der Endpunkt D der Diagonale nach rechts auf einem Kreise mit dem Centrum B und dem Radius $B\,D = B\,D' = A\,C = P_2$, die Resultante $A\,D = R$ wird hierdurch immer grösser und erhält für $\alpha = 0$ den Wert $A\,D' = A\,B + B\,D' = P_1 + P_2$ und mithin ist

$$R = P_1 + P_2$$

oder in Worten: Wirken zwei Kräfte auf einen Punkt in derselben Linie und nach derselben Seite, so ist die resultierende Kraft gleich der Summe der Komponenten.

Drittens. Wenn man dagegen den Winkel $CAB = \alpha$ wachsen lässt, bis zu zwei Rechten, so bewegt sich der Punkt D auf demselben Kreise wie vorhin, aber nach links, die Diagonale DA nimmt infolgedessen fortwährend ab und erhält bei $\alpha = 180^0$ den Wert

$$AD'' = AB - BD'' = P_1 - P_2.$$

Demnach hat man

$$\boldsymbol{R = P_1 - P_2}$$

oder in Form eines Lehrsatzes: Die Resultante zweier Komponenten, welche in einer Geraden auf einen Punkt nach entgegengesetzten Seiten wirken, ist gleich der Differenz beider und geht nach der Seite der grösseren Kraft.

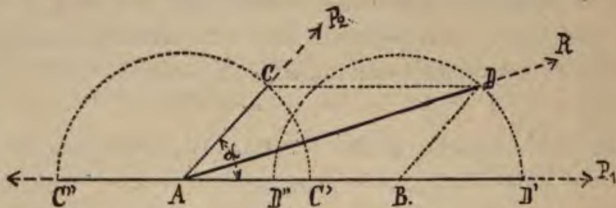


Fig. 21.

Sind im letzten Falle die beiden Komponenten P_1 und P_2 einander gleich, so ergiebt sich aus der letzten Gleichung die Resultierende

$$\boldsymbol{R = 0,}$$

mithin erfolgt gar keine Bewegung und es gilt der Satz: Zwei gleiche Kräfte, welche auf einen Punkt in derselben Geraden nach verschiedenen Seiten wirken, halten sich das Gleichgewicht oder heben einander auf.

§ 50.

Übungsbeispiele.

160. Man berechne die Mittelkraft zweier zu einander lotrechter Kräfte von *3 kg* und *4 kg*.

Lösung: $R = 5\ kg$.

161. Desgleichen, wenn die beiden Kräfte *39* und *52 kg* betragen.
Lösung: $R = 65$ *kg.*

162. Auf den Scheitel eines rechten Winkels wirken in dem einen Schenkel zwei Kräfte von *21* und *18*, im anderen zwei Kräfte von *27* und *53 kg*, jedes Paar nach derselben Seite hin; es soll die Gesamtresultante durch Rechnung gefunden werden.
Lösung: $R = 89$ *kg.*

163. In zwei sich senkrecht schneidenden Geraden wirken auf den Durchschnittspunkt A vier Kräfte von *48*, *110*, *12* und *33 kg*, die erste nach rechts, die zweite nach oben, die dritte nach links und die letzte nach unten; wie gross berechnet sich hieraus die resultierende Kraft?
Antwort: $R = 85$ *kg.*

164. Wenn ein Körper von *159 kg* Gewicht durch zwei, einen rechten Winkel einschliessende Kräfte von *28* und *45 kg* fortbewegt wird, wie gross ist dann die Resultante P, sowie die durch letztere bewirkte Beschleunigung p?
Antwort: $P = 53$ *kg* und $p = 3{,}27$ *m.*

165. Zwei gleiche Kräfte P bilden nacheinander die Winkel 0°, 60°, 90°, 120° und 180°; man soll für jeden einzelnen Fall die Mittelkraft berechnen.
Resultate: $2\,P$, $P\sqrt{3}$, $P\sqrt{2}$, P und 0.

166. Zwei Kräfte $P_1 = 72$ *kg* und $P_2 = 96$ *kg* wirken unter einem Winkel $\alpha = 72^\circ$; man bestimme durch Zeichnung die Resultierende R, sowie die Winkel α_1 und α_2, welche R mit P_1 und P_2 einschliesst.
Resultate: $R = 136$ *kg*, $\alpha_1 = 42^\circ$, $\alpha_2 = 30^\circ$.

167. Ebenso, wenn $P_1 = 111$ *kg*, $P_2 = 244$ *kg* und $\alpha = 109^\circ$ gegeben sind.
Resultate: $R = 233$ *kg*, $\alpha_1 = 82^\circ$.

168. Der Winkel, welchen die beiden Kräfte von *5* und *6 kg* mit einander einschliessen, springt von 0° auf 30°, 60°, 90°, 120°, 150° und 180°; man ermittele diejenigen sieben Werte, welche dadurch die Resultante hintereinander annimmt.
Ergebnisse: *11 kg*, *10,6 kg*, *9,5 kg*, *7,8 kg*, *5,6 kg*, *3 kg* und *1 kg*.

§ 51.

Das Polygon der Kräfte.

Um mehr als zwei, z. B. die vier Kräfte $A\,B = P_1$ (Fig. 22), $A\,C = P_2$, $A\,D = P_3$ und $A\,E = P_4$, welche sämtlich in A angreifen, zusammenzusetzen, braucht man nur den Satz vom Parallelogramm der Kräfte wiederholt anzuwenden. Ergänzt man nämlich $A\,B$ und $A\,C$ zum Parallelogramm $A\,B\,F\,C$, so ist $A\,F$ die Mittelkraft von P_1 und P_2; konstruiert man sodann aus $A\,F$ und $A\,D$ ein Parallelogramm $A\,F\,G\,D$, so drückt dessen Diagonale $A\,G$ die Wirkung von $A\,F$ und P_3, folglich auch von P_1, P_2 und P_3 aus, und vereinigt man endlich mit Hilfe des Parallelogramms $A\,G\,H\,E$ die beiden Kräfte $A\,G$ und $A\,E$ zur Resultante $A\,H = R$, so stellt letztere die Mittelkraft von allen vier Komponenten P_1, P_2, P_3 und P_4 dar.

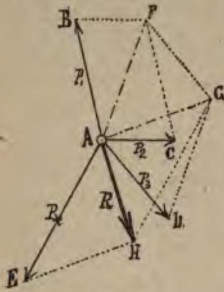


Fig. 22.

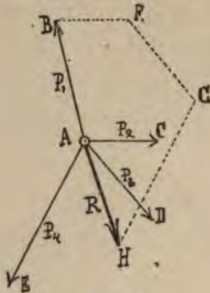


Fig. 23.

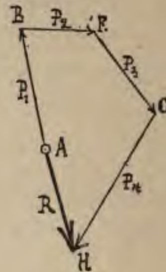


Fig. 24.

Lässt man aber die zur Bestimmung von R unnötigen Linien fort und verallgemeinert das vorstehende Verfahren auf beliebig viele in einem Punkte A angreifende Seitenkräfte, so ergiebt sich die Regel: Soll ein System von beliebig vielen (etwa n) auf einen Punkt A (Figuren 23 und 24) wirkenden und durch Strecken dargestellten Kräften P_1, P_2, P_3, $\cdots P_n$ zusammengesetzt werden, so ziehe man durch den Endpunkt von P_1 eine Linie, die parallel und gleich der zweiten Kraft P_2, dann durch den eben erhaltenen Punkt eine Gerade, welche parallel und gleich der dritten Komponente P_3 ist und fahre so fort, bis man eine Strecke

verzeichnet hat, welche parallel und gleich ist der letzten Seitenkraft P_n. Man erhält auf diese Weise eine gebrochene Linie, deren n Teile parallel und gleich sind denjenigen Strecken, welche die Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ darstellen, und die Verbindungsgerade der Endpunkte dieser gebrochenen Linie drückt die Resultante aller n Einzelkräfte aus.

Wenn sich die gebrochene Linie spezieller Weise in A schliesst, so ist offenbar die Gesamtresultante gleich Null, die n Kräfte haben also in diesem Falle keine (sichtbare) Wirkung, oder, wie der hierfür gebräuchliche Ausdruck lautet: „sie halten sich das Gleichgewicht“.

Die erste Kraft, ferner die Strecken, von welchen jede einer der gegebenen Komponenten parallel und gleich ist, sowie die resultierende Kraft bilden zusammen ein Vieleck $ABFGH$, welches das Polygon der Kräfte genannt wird, und man kann daher auch sagen: Ein System von beliebig vielen in einer Ebene auf den Punkt A wirkenden Kräfte ruft keine Bewegung hervor oder ist im Gleichgewichte, wenn das Kräftepolygon dieselbe Anzahl von Seiten besitzt, als Komponenten vorhanden sind.

§ 52.

Übungsbeispiele.

169. Drei Kräfte von *9 kg*, *21 kg* und *15 kg*, von welchen die beiden ersten einen Winkel von 56^0 und die beiden letzten einen solchen von 104^0 mit einander bilden, wirken auf einen Punkt A in einer Ebene. Man soll (durch Konstruktion) Grösse und Richtung der Mittelkraft bestimmen.

Lösung: Letztere ist *23,5 kg* und schliesst mit der ersten Komponente einen Winkel von $73^0\ 30'$ ein.

170. Welches ist die Grösse und Richtung der Resultante aus den vier in einer Ebene auf den Punkt A wirkenden Kräfte $P_1 = 9{,}6$, $P_2 = 8$, $P_3 = 7{,}2$ und $P_4 = 10\ kg$, wenn aufeinander folgend je zwei benachbarte Seitenkräfte die Winkel 75^0, 30^0 und 90^0 bilden?

Antwort: Es ist die Resultante $R = 12{,}1\ kg$ und bildet mit P_1 einen Winkel von $89^0\ 15'$.

171. Auf einen Punkt wirken die fünf Kräfte von *9*, *10*, *12*, *5* und *4 kg*, die vier letzteren bilden der Reihenfolge nach mit der ersten die Winkel *70°*, *120°*, *200°* und *240°*. Man soll durch Zeichnung die Resultierende R und ihren Winkel α mit der ersten Kraft ermitteln.

Resultate: $R = 14{,}6\ kg$ und $\alpha = 91°$.

172. Desgleichen für die Komponenten von *4*, *8*, *12* und *16 kg* mit den Winkeln von *45°*, *90°* und *135°*.

Resultate: $R = 29\ kg$ und $\alpha = 93°\ 15'$.

173. Ebenso für die Seitenkräfte von *10*, *8*, *6* und *2 kg* und die Winkel *90°*, *165°* und *240°*.

Resultate: $R = 8{,}5\ kg$ und $\alpha = 68°$.

174. Von sechs Kräften, welche in einer Ebene den Punkt A angreifen und der Reihe nach *8*, *15*, *22*, *29*, *36* und *43 kg* betragen, schliessen immer je zwei benachbarte einen Winkel von *60°* ein, man berechne Grösse und Richtung der Mittelkraft.

Lösung: Dieselbe ist *42 kg* und fällt in die Wirkungslinie der fünften Kraft.

§ 53.

Bedingung des Gleichgewichts für Kräfte, welche auf einen Punkt und in derselben Ebene wirken.

Der am Schlusse des vorletzten Paragraphen erwähnte Gleichgewichtszustand ist so wichtig, dass er nochmals besonders hervorgehoben und in seinen einzelnen Fällen besprochen zu werden verdient.

Zunächst halten sich nach dem letzten Satze des § 49 zwei Kräfte das Gleichgewicht, wenn sie einander gleich sind und in derselben Geraden nach entgegengesetzten Seiten wirken (Fig. 25).

Sodann befinden sich drei Kräfte $AB = P_1$ (Fig. 26), $AC = P_2$ und $AE = P_3$ im Gleichgewichtszustande, wenn sie die Seiten eines Dreiecks ABD bilden, oder auch, wenn sie sich wie die Seiten eines Dreiecks verhalten, weil ja die Krafteinheit durch jede beliebige Strecke ausgedrückt werden darf.

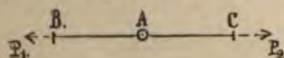


Fig. 25.

Allgemein heben beliebig viele auf einen Punkt und in derselben Ebene wirkende Kräfte, z. B. $AB = P_1$ (Fig. 27), $AC = P_2$, $AD = P_3$, $AE = P_4$, $AF = P_5$ einander auf, sobald sie proportional und parallel sind den Seiten eines Vielecks $ABGHI$, wobei aber noch zu beachten ist, dass, wenn man von A aus den

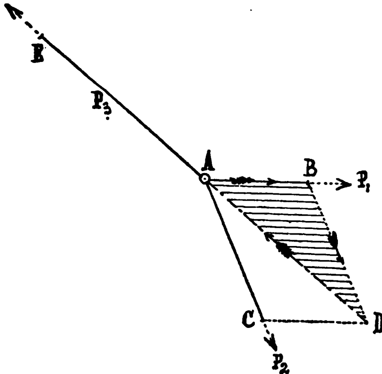


Fig. 26.

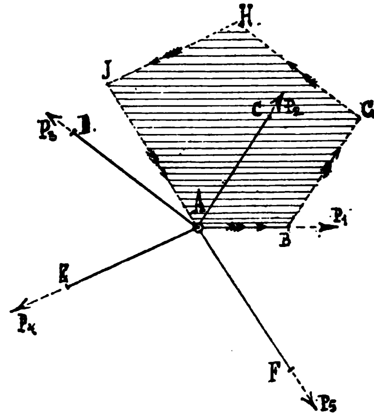


Fig. 27.

Umfang des Polygons durchläuft, alle Kräfte in demselben Bewegungssinne wirksam sein müssen. Letzteres ist in der Figur noch besonders durch Pfeile angedeutet.

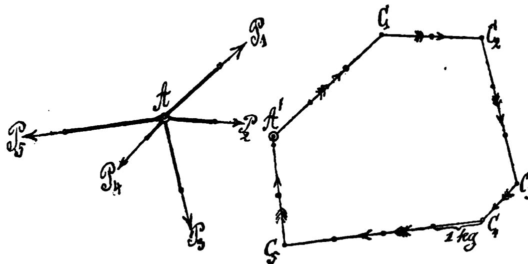


Fig. 28.

Es mögen beispielsweise die fünf Kräfte $P_1 = 3\ kg$, $P_2 = 2\ kg$, $P_3 = 3\ kg$, $P_4 = 1\ kg$ und $P_5 = 4\ kg$ in denjenigen Richtungen auf den Punkt A wirken, wie sie Figur 28 zeigt, und man soll nun entscheiden, ob diese Kräfte sich das Gleichgewicht halten, bzw., falls die Antwort verneinend ausfallen sollte, diejenige Kraft P_6 angeben, welche das Gleichgewicht herstellen würde.

Zu diesem Behufe wählen wir nach Gutdünken einen Punkt A' und konstruieren unter Annahme einer passenden Längeneinheit ($A'B$) zunächst $A'C_1 = 3$ parallel P_1, dann $C_1C_2 = 2$ parallel P_2, $C_2C_3 = 3$ parallel P_3, $C_3C_4 = 1$ parallel P_4 und $C_4C_5 = 4$ parallel P_5.

Wir sehen, dass der letzte Punkt C_5 nicht mit A' zusammenfällt und schliessen daraus, dass unsere fünf Kräfte sich nicht im Gleichgewichte befinden.

Verbinden wir aber jetzt C_5 mit A', so stellt die erhaltene Strecke $C_5 A'$, welche *2,2* Einheiten misst und mit $C_5 C_4$ einen Winkel von 90° einschliesst, nach Grösse und Richtung diejenige Kraft P_6 dar, welche die obigen fünf Kräfte ins Gleichgewicht setzt. Wenn wir also in A eine Kraft von *2,2 kg* rechtwinklig zu P_5 nach oben wirken lassen, so haben wir ein System von sechs Kräften, welche sich gegenseitig aufheben.

§ 54.

Die Zerlegung einer Kraft auf konstruktivem Wege.

Bisher beschäftigte uns die Aufgabe, zwei oder mehr Kräfte zu einer einzigen zu vereinigen, um hierdurch Kenntnis vom Gesamtresultat zu erlangen. Noch häufiger macht es sich aber zur Beurteilung der Wirkung von nur einer gegebenen vorliegenden Kraft P nötig, zwei andere Kräfte P_1 und P_2 ausfindig zu machen, welche beide zusammengenommen gegenau dasselbe Endergebnis haben, wie jene gegebene Kraft P für sich allein und welche die Seitenkräfte oder die Komponenten von P heissen.

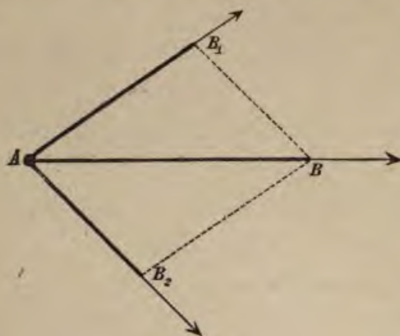


Fig. 29.

Behufs Lösung dieser Aufgabe, welche das Zerlegen der Kraft P genannt wird, braucht man aber blos ein Parallelogramm $A\,B_1\,B\,B_2$ (Fig. 29) zu konstruieren, von welchem die als Strecke $A\,B$ gezeichnete Kraft P Diagonale ist; denn es stellen dann die Seiten $A\,B_1$ und $A\,B_2$ zwei Kräfte P_1 und P_2 dar, welche nach § 49 die Resultante $A\,B = P$ besitzen.

Offenbar müssen dabei die Richtungen der beiden Seitenkräfte P_1 und P_2 entweder direkt gegeben sein oder aus den Bedingungen jedes speziellen Falles hervorgehen, damit die Aufgabe eine bestimmte ist. Das Nähere sollen die folgenden Beispiele zeigen.

Erstens. Wenn die in Figur 30 durch die Strecke $A\,B$ dargestellte Kraft P an einem auf horizontaler Ebene $M\,N$ ruhenden Körper K in der Richtung des angesetzten Pfeiles wirkt, so sagt

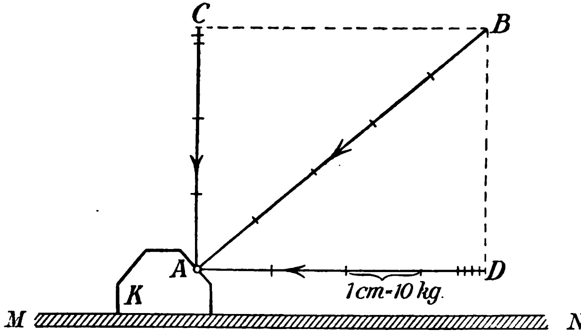


Fig. 30.

uns schon das auf die Erfahrung sich stützende „praktische Gefühl," dass ihre Wirkung eine doppelte sein muss: erstens verstärkt sie den Vertikaldruck, welcher bereits infolge des Eigengewichts zwischen dem Körper und seiner Unterlage stattfindet und zweitens sucht sie den Körper längs der Horizontalebene $M\,N$ fortzuschieben; auch können wir voraussehen, dass mit wachsendem Winkel $B\,A\,D = \alpha$ der Vertikaldruck zu-, dagegen die schiebende Kraft abnehmen wird *).

Um aber genaueren Aufschluss zu erhalten, konstruieren wir über $A\,B$ als Diagonale ein Rechteck $A\,C\,B\,D$ mit vertikalen und horizontalen Seiten; denn dann versinnlicht uns $A\,C$ den

*) Behufs Erzielung einer richtigen Vorstellung von den Kräftewirkungen sollte der Anfänger im Studium der Mechanik die Erscheinungen in der Natur und im gewöhnlichen Leben beobachten und deren Ursachen sich klar zu machen suchen. So wird z. B. die obige Zerlegung einer Kraft in nachfolgenden einem jeden bekannten Vorgängen deutlich zum Ausdruck gebracht:

1) Der Tischler drückt unter einem gewissen Winkel von oben nach unten auf den Hobel, damit dieser nicht bloss senkrecht gegen die Hobelfläche gepresst wird (Druckkomponente, der Hobel soll „greifen"), sondern auch in der Richtung der Hobelfläche fortschreitet (Schubkomponente).

2) Wenn jemand beim Gehen einen starken Luftstrom schräg in den Rücken erhält, so fühlt er einerseits, wie er längs des Wegs fortgeschoben

Vertikaldruck V und $A\,D$ den Horizontalschub H, welche die Kraft P auf den Körper K ausübt.

Wäre z. B. $P = 50\ kg$, $\alpha = 40^{\circ}$ und wir drücken $1\ kg$ durch $1\ mm$ aus, machen demnach $A\,B = 50\ mm = 5\ cm$, so ergiebt sich $A\,C = 32\ mm$ und $A\,D = 38\ mm$, woraus folgt, dass die Kraft $P = 50\ kg$ auf den Körper den Vertikaldruck $V = 32\ kg$ und den Horizontalschub $H = 38\ kg$ hervorbringt.

Zweitens. Auf einem Träger $B\,C$ (Fig. 31), welcher durch eine Strebe $A\,D$ gestützt wird, ruht eine Last $Q = 1000\ kg$,

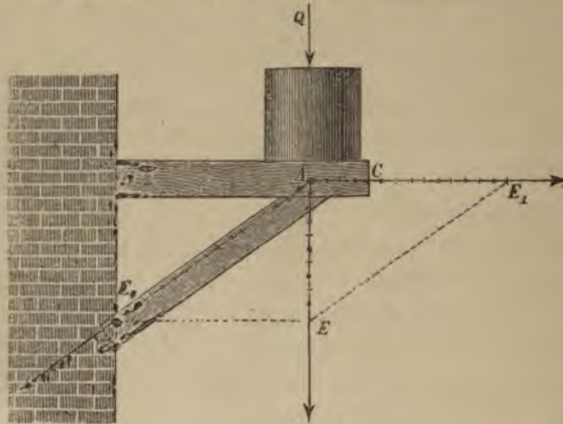


Fig. 31.

welche im Punkt A angreift; es sollen die von Q im Träger und in der Strebe hervorgerufenen Spannungen bestimmt werden.

---

wird, andrerseits bemerkt er aber auch das Bestreben des Windes, ihn aus der Bahnrichtung herauszudrängen.

3) Während des Schreitens (bei Luftstille) wird das eine Bein vorgesetzt und bildet einen spitzen Winkel α mit dem (horizontal angenommenen) Boden; ein Teil des Körpergewichts pflanzt sich im Bein fort und erzeugt erstens einen Normaldruck auf den Fussboden und zweitens einen Horizontalschub, welcher um so grösser ausfällt, je kleiner α ist. Auf gewöhnlichem Wege wird dieser Horizontalschub durch die Reibung zwischen Schuhsohle und Erdboden aufgehoben; aber auf spiegelglatter Eisfläche ist die Reibung so gering, dass die Schubkomponente keinen genügenden Widerstand findet, wir gleiten folglich aus und machen deshalb unwillkürlich ganz kurze Schritte — meist auch mit Erfolg, weil hierdurch die Beine eine nahezu lotrechte Lage behalten, infolgedessen α wenig von 90° sich entfernt und mithin die horizontale Schubkomponente sehr klein bleibt, sodass selbst die geringe Reibung zwischen Schuhsohle und Eisfläche hinreicht, um der Schubkomponente das Gleichgewicht zu halten.

Zu dem Ende tragen wir eine passende Längeneinheit, welche *100 kg* ausdrücken soll, von A aus vertikal abwärts, machen also $A\,E = 10$, und rechtwinklig zu $B\,C$. Hierauf ziehen wir durch A und E Parallele zu $B\,C$, sowie $A\,D$ und erhalten hierdurch ein Parallelogramm $A\,E_1\;E\,E_2$, dessen Diagonale $A\,E$ die Last $Q = 1000\,kg$ versinnlicht und dessen Seiten $A\,E_1$, sowie $A\,E_2$ die gesuchten Spannungen darstellen. Wir finden bei genauer Zeichnung $A\,E_1 = 13{,}5$, $A\,E_2 = 16{,}75$ und erkennen daraus, dass im Träger $B\,C$ ein Zug von *1350 kg*, dagegen in der Strebe $A\,D$ ein Druck von *1675 kg* stattfindet.

Drittens. Wenn in der Längsrichtung eines Dachsparrens $A\,E$ (Fig. 32), dessen unteres Ende in einen horizontalen Balken $A\,F$ befestigt ist und welcher mit letzterem einen Winkel $\alpha = 25^0$ einschliesst, ein Druck von *800 kg* existiert, so übt letzterer eine doppelte Wirkung aus: nämlich erstens einen gewissen Vertikaldruck V, mit welchem dann das den Balken $A\,F$ tragende Mauerwerk belastet wird, und zweitens einen Horizontalschub H, welcher in $A\,F$ eine bestimmte Spannung erzeugt. Um die Grössen dieser beiden Wirkungen zu

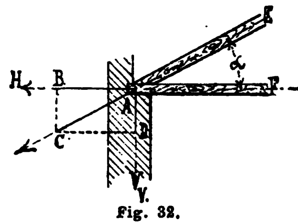


Fig. 32.

erhalten, konstruieren wir den gegebenen Druck von *800 kg* als Strecke $A\,C$, welche wir etwa *8 cm* lang machen, sodass jedes Centimeter *100 kg* ausdrückt, und verzeichnen nun über $A\,C$ als Diagonale ein Rechteck $A\,B\,C\,D$, dessen beiden Seiten $A\,B$ und $A\,D$ in horizontaler, bzw. vertikaler Richtung verlaufen und demgemäss auch die gesuchten Komponenten darstellen. Weil die Abmessungen von $A\,B$ und $A\,D$ *7,25* und *3,38* Centimeter ergeben, so ist der Horizontalschub $\boldsymbol{H = 725\,kg}$ und der Vertikaldruck $\boldsymbol{V = 338\,kg}$.

§ 55.

Übungsbeispiele.

175. Auf einen Punkt A wirkt die Kraft $P = 200\,kg$, dieselbe soll durch zwei andere Kräfte P_1 und P_2 ersetzt werden, welche mit P die Winkel $\alpha_1 = 30^0$ und $\alpha_2 = 45^0$ bilden. P_1 und P_2 durch Konstruktion zu ermitteln.

Resultate: $P_1 = 146\,kg$, $P_2 = 103\,kg$.

176. Eine Kraft $P = 100\ kg$ soll in zwei Seitenkräfte P_1 und P_2 zerlegt werden, welche mit der Richtung von P bezüglich die Winkel $\alpha_1 = 71^0$ und $\alpha_2 = 30^0\ 30'$ bilden; man ermittle durch Konstruktion die Seitenkräfte.

Resultate: $P_1 = 52\ kg$, $P_2 = 96\ kg$.

177. Welchen Normaldruck N erleidet eine wagerechte Ebene durch einen *130 kg* schweren Körper (Fig. 33), wenn an letzterem eine Kraft von *110 kg* unter einem Winkel von $\alpha = 65^0\ 20'$ gegen den Horizont aufwärts wirkt und mit welcher Kraft P wird dieser Körper in horizontaler Richtung fortgezogen?

Resultate: $N = 30\ kg$ und $P = 46\ kg$.

178. Mit welcher Beschleunigung würde sich der in voriger Aufgabe genannte Körper unter der Annahme bewegen, dass der Reibungswiderstand den sechsten Teil des Normaldruckes beträgt?

Antwort: Mit der Beschleunigung $p = 3{,}1\ m$.

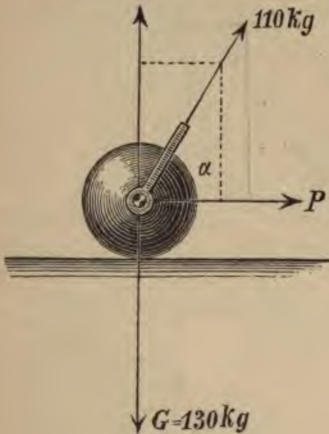


Fig. 33.

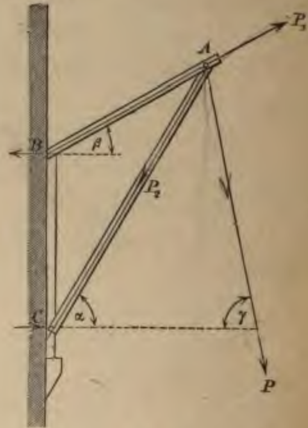


Fig. 34.

179. Am Punkt A der durch Figur 34 dargestellten Tragkonstruktion wirkt die unter $\gamma = 80^0$ zum Horizont geneigten Kraft $P = 1700\ kg$. Man ermittele den Zug P_1 im Stabe $A\ B$ und den Druck P_2 im Stabe $A\ C$, wenn ersterer den Winkel $\beta = 25^0$ und letzterer den Winkel $\alpha = 65^0$ mit dem Horizont einschliesst.

Resultate: $P_1 = 1516\ kg$ und $P_2 = 2554\ kg$.

§ 56.

Zerlegung einer Kraft auf dem Wege der Rechnung.

In der Mathematik und Mechanik giebt es zwei Hauptwege zur Bestimmung von Grössen, nämlich erstens die geometrische Konstruktion oder die graphische Methode und zweitens die Rechnung oder die analytische Methode; die erstere besitzt den Vorteil der Übersichtlichkeit, bietet aber in manchen Fällen keine genügende Genauigkeit, während durch das rechnerische Verfahren jeder beliebige Genauigkeitsgrad erreicht werden kann. Da ferner in manchen Fällen die erste, in anderen Fällen wieder die zweite Methode schneller und bequemer zum Ziele führt, so ist es zweckmässig, beide Methoden kennen zu lernen. Dies gilt natürlich auch für das uns jetzt vorliegende Problem der Zerlegung einer Kraft, welches wir im letzten Paragraphen konstruktiv gelöst haben.

Nun müssen wir zwar vorerst auf das wichtigste Rechnungsmittel, die Trigonometrie, verzichten, aber unter gewissen Umständen können wir auch jetzt schon eine Kraft P durch Rechnung zerlegen, zunächst dann, wenn die beiden Dreiecke, in welche das Kräfteparallelogramm durch die Diagonale zerfällt, rechtwinklig sind und ausserdem die spitzen Winkel entweder von 30^0 und 60^0 oder von je 45^0 enthalten; denn bezeichnet a die Hypotenuse, so ist bekanntlich im ersten Fall die kleinere Kathete $\frac{a}{2}$, folglich nach dem Pythagoras die grössere $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ und im andern Falle sind beide Katheten nach demselben Satze gleich $\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

Demnach würde in Fig. 30 die durch AB versinnlichte Kraft $P = 50\ kg$ vermittels des Körpers K auf die Ebene MN bei dem Neigungswinkel $\alpha = 30^0$ den Vertikaldruck

$$V_1 = \frac{P}{2} = 25\ kg$$

ausüben und der zugehörige Horizontalschub würde

$$H_1 = \frac{P}{2} \cdot \sqrt{3} = 25 \cdot 1{,}732 = 43{,}3\ kg$$

sein; bei $\alpha = 45^0$ erhielten wir die entsprechenden Werte

$$V_2 = H_2 = \frac{P}{2} \cdot \sqrt{2} = 25 \cdot 1{,}414 = 35{,}35\ kg$$

und bei $\alpha = 60^0$ die Komponenten

$$V_3 = \frac{P}{2} \cdot \sqrt{3} = 43{,}3\ kg,\ H_3 = \frac{P}{2} = 25\ kg.$$

Eine Zerlegung derselben Art ist an dem aus Figur 35 ersichtlichen Träger einer Fachwerkbrücke vorzunehmen, um die Spannungen in den einzelnen Stäben zu erfahren. Setzen wir diesen Träger, welcher aus vier quadratischen Feldern nebst Diagonalen gebildet ist, gleichmässig belastet voraus, so kommt auf jeden Knotenpunkt (O, B, B_1) der unteren Gurtung $E\,E_1$ die nämliche Last P.

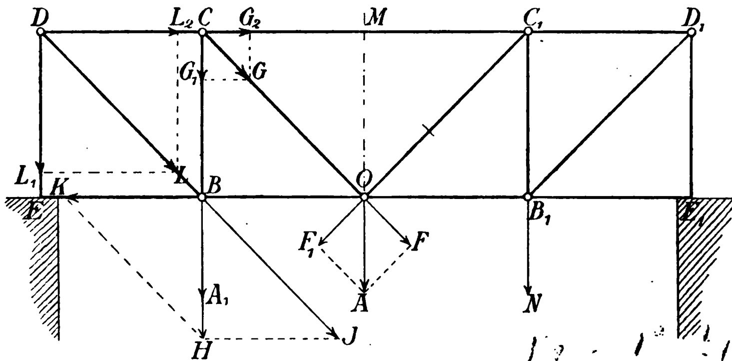


Fig. 35.

Die in O wirksame Last $O\,A = P$ zerlegt sich nach den Richtungen $O\,C$ und $O\,C_1$ in die Komponenten

$$O\,F = O\,F_1 = \frac{P}{\sqrt{2}}$$

und ruft in beiden Diagonalen Zugspannungen hervor, welche sich bis an die Knotenpunkte C und C_1 fortpflanzen. Verfolgen wir vorläufig blos die Kräftewirkungen in der linken Hälfte des Trägers, so spaltet sich der Zug

$$C\,G = O\,F = \frac{P}{\sqrt{2}}$$

wieder in die Seitenkräfte

$$C\,G_1 = C\,G_2 = \frac{C\,G}{\sqrt{2}} = \frac{P}{2},$$

sodass schon hierdurch in jedem der beiden Stäbe CM und CB der Druck $\frac{P}{2}$ erzeugt wird. Dazu kommt aber noch die direkte Belastung P, so dass in B die Kraft

$$BH = P + \frac{P}{2} = \frac{3}{2} P$$

vertikal abwärts wirkt. Diese letztere zerlegt sich jetzt nach den beiden Richtungen der unteren Gurtung der Diagonale in die Komponenten

$$BK = BH = \frac{3}{2} P$$

und

$$BJ = BH \cdot \sqrt{2} = \frac{3}{2} P \sqrt{2},$$

welch letztere die Diagonale BD auf Zug beansprucht, sich darin bis D fortpflanzt und dort wieder in die gleichen Seitenkräfte

$$DL_2 = DL_1 = \frac{DL}{\sqrt{2}} = \frac{BJ}{\sqrt{2}} = BH = \frac{3}{2} P$$

spaltet. Wir kommen daher zu folgendem Gesamtresultat:

In sämtlichen Vertikalstreben BC, DE, $B_1 C_1$, $D_1 E_1$ wirken die gleichen Druckspannungen

$$BH = DL_1 = \frac{3}{2} P$$

in den inneren Diagonalen OC und OC_1 die kleineren Zugspannungen

$$OF = \frac{P}{2} \sqrt{2},$$

in den äusseren BD und $B_1 D_1$ die grösseren Zugspannungen

$$BJ = \frac{3}{2} P \sqrt{2}.$$

Die obere Gurtung ist auf Druck beansprucht, weil CG_2, sowie DL_2 nach rechts wirken und von gleich grossen in C_1 und D_1 stattfindenden Reaktionen aufgenommen werden. In DC herrscht

$$DL_2 = \frac{3}{2} P,$$

der kleinere, dagegen in CM

$$DL_2 + CG_2 = \frac{3}{2}P + \frac{P}{2} = 2P,$$

der grössere Druck.

Die untere Gurtung wird auf Zug beansprucht, da in B die Komponente

$$BK = \frac{3}{2}P$$

nach links und in B_1 eine ebensogrosse Kraft nach rechts wirkt.

Ein zweites Mittel, um die Zerlegung einer gegebenen Kraft P auf rechnerischem Wege zu bewerkstelligen, haben wir in der Benutzung der Ähnlichkeit von Dreiecken; denn nicht selten bilden die die Komponenten aufnehmenden Konstruktionsstäbe des in Frage kommenden Gebildes ein dem halben Kräfteparallelogramm ähnliches Dreieck oder es lässt sich ein anderes Dreieck ausfindig machen, welches die eben erwähnte Eigenschaft besitzt. Dann braucht man aber blos die homologen Seiten ins Verhältnis zu setzen und hat damit eine Gleichung, aus welcher man die unbekannten Komponenten berechnen kann.

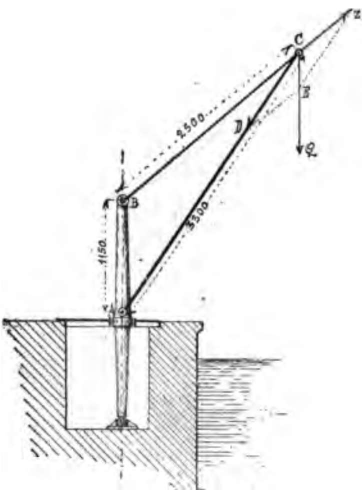


Fig. 36.

Als Erläuterungsbeispiel wählen wir den in Fig. 36 zur Anschauung gebrachten, freistehenden Uferkran, welcher im Punkte C mit $Q = 1000\ kg$ belastet ist. Es fragt sich nun, welcher Druck D in der Strebe $AC = 3300\ mm$ und welcher Zug Z in der $2500\ mm$ langen Stange BC unter der Voraussetzung herrscht, dass die Kransäule AB eine Höhe von $1150\ mm$ besitzt.

Um dies zu erfahren, bedenken wir, dass das Kräfteparallelogramm $CDEZ$ durch die Last $CE = Q$ in zwei kongruente Dreiecke zerlegt wird, welche wegen Gleichheit der Winkel beide dem Dreieck ABC ähnlich sind. Es gelten daher die Proportionen

$$D : 1000 = 3300 : 1150, \; Z : 1000 = 2500 : 1150$$

und man erhält

$$D = \frac{330000}{115} = 2869 \frac{13}{23} \, kg \sim 2870 \, kg,$$

den Druck in der Strebe $A\,C$, sowie

$$Z = \frac{250000}{115} = 2173 \frac{21}{23} \, kg \sim 2174 \, kg,$$

den Zug in der Stange $B\,C$.

Setzen wir allgemein $A\,B = h$, $B\,C = l$ und $C\,A = L$, so geben die beiden Formeln

$$D = \frac{L}{h} Q \text{ und } Z = \frac{l}{h} Q$$

Aufschluss über die Kräfteverteilung eines jeden derartigen Kranes, bei welchem die Endpunkte A und B von Strebe und Zugstange auf einer Vertikalen liegen.

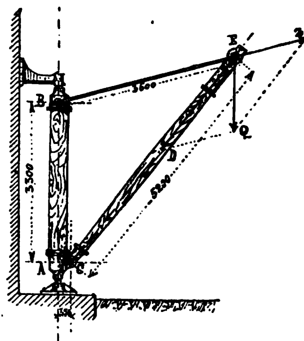


Fig. 37.

Wenn dagegen, wie bei dem in Figur 37 skizzierten Magazinkran, die eben genannte Bedingung nicht erfüllt ist, so sind wir entweder lediglich auf den konstruktiven Weg angewiesen, oder wir müssen diesen auf jenen Fall zurückführen, indem wir z. B. durch C eine Parallele zur Lastrichtung legen. Hierdurch wird, wie man durch Messen oder Abschätzen feststellen kann, die Zugstange um circa *365 mm* verkürzt, dagegen $A\,B$ um etwa *100 mm* verlängert, und es ergeben sich mithin die gewünschten Reaktionen D und Z für diesen Kran, indem wir

$$l = 3600 - 365 = 3235, \quad h = 3300 + 100 = 3400, \quad L = 5200$$
$$\text{und } Q = 4000$$

in die obigen beiden Formeln einführen, nämlich

$$D = \frac{L}{h} Q = \frac{5200}{3400} \cdot 4000 = \frac{26}{17} \cdot 4000 = \sim 6118 \, kg$$

und

$$Z = \frac{l}{h} Q = \frac{3235}{3400} \cdot 4000 = \frac{6470}{17} = \sim 3806 \, kg.$$

Der Leser möge vorstehende Aufgabe rein graphisch behandeln und seine Resultate mit den hier gefundenen Zahlen vergleichen!

Nicht immer sind die Richtungen der Komponenten, in welche man eine gegebene Kraft zu zerlegen hat, so ganz selbstverständlich wie bisher, sondern erfordern zuweilen eine vorausgehende Überlegung.

Soll beispielsweise der Einfluss der Last Q auf den in Fig. 38 dargestellten Eisenbahnkran festgestellt werden, so liegt zunächst klar zu Tage, dass die erstere den letzteren um-

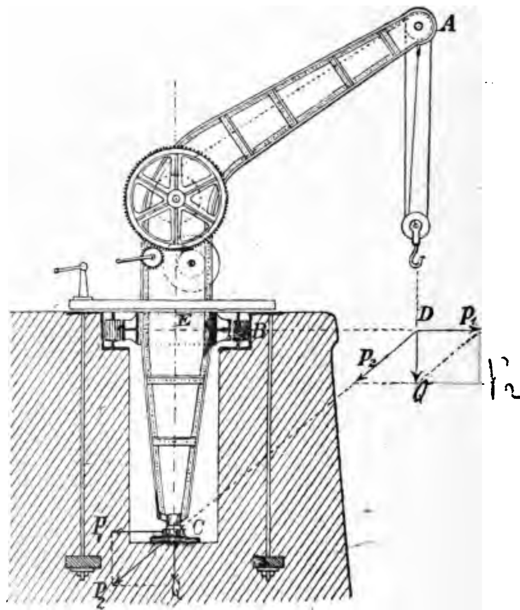


Fig. 38.

stürzen würde, wenn der Kran nicht an der Leitrolle B durch die cylindermantelförmige Leitbahn und am Zapfen C durch das umschliessende Lager festgehalten würde; die Last Q erzeugt demnach in B und C zwei Druckkräfte, welche durch gleich grosse Gegendrücke aufgehoben werden.

Da nun der Druck in B rechtwinklig zur Berührungsfläche zwischen Leitrolle und Leitbahn, also horizontal gerichtet ist und die Wirkungslinie von Q in D schneidet, so giebt die von

D nach C gezogene Linie die Richtung des von Q auf C ausgeübten Druckes an, und wir haben mithin die Last Q von D aus nach den so bestimmten Richtungen hin in die Komponenten P_1 und P_2 zu zerlegen.

Bezeichnet man jetzt den Abstand DE zwischen Lastrichtung und Drehachse des Kranes mit a, sowie CE mit h, und bedenkt, dass das von P_1, Q und P_2 gebildete Kräftedreieck dem Dreieck CDE ähnlich ist, so erhält man die Proportion

$$P_1 : Q = a : h$$

und hieraus ergiebt sich

$$P_1 = \frac{a}{h} Q,$$

der Druck, welcher durch den Einfluss von Q an der Leitrolle entsteht.

Was den Druck P_2 anlangt, welcher durch die Last Q am Zapfen C hervorgerufen wird, so zerlegen wir denselben wieder in zwei Komponenten vertikal abwärts und horizontal nach links. Wir überzeugen uns leicht, dass das bei C entstehende Kräfteparallelogramm demjenigen bei D kongruent ist und schliessen daraus: die Last Q überträgt auf den Zapfen C einen Vertikaldruck, welcher mit Q selbst und einen Horizontaldruck, welcher mit dem Drucke P_1 an der Leitrolle übereinstimmt.

§ 57.

Übungsbeispiele.

180. Im Punkte A des mittels der Zugstange AB (Fig. 39) befestigten Trägers AC hängt die Last P. Man bestimme die Spannungen, welche letztere in AB und AC erzeugt, indem man $BC = a$, $CA = b$ und $AB = c$ setzt.

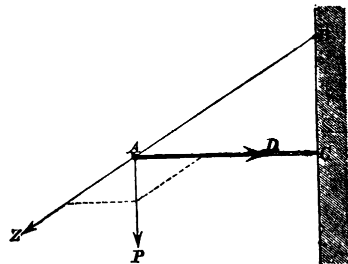


Fig. 39.

Resultate: Die Last P ruft in AB den Zug $Z = \frac{Pc}{a}$ und in AC den Druck $D = \frac{Pb}{a}$ hervor, wobei die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt.

181. Die Hängesäule *A B* eines einfachen Hängewerkes (Fig. 40) ist auf *10000 kg* Zug beansprucht. Man bestimme durch Rechnung denjenigen Druck *D*, welchen jede der beiden unter 45^0 gegen den Horizont geneigten Streben *A C* und *A E* auszuhalten hat.

Resultat: $D = 7071\ kg.$

182. Die beiden gleich langen Streben *A C* und *B E* eines doppelten Hängewerkes (Fig. 41) sind unter $\alpha = 45^0$ gegen den Horizont geneigt und durch einen wagerechten Spannriegel *A B* verbunden. Man berechne die Drücke *D* in den Streben und den Druck *P* im Spannriegel, wenn an jeder der beiden vertikalen Hängestangen eine Last $Q = 6000\ kg$ wirkt.

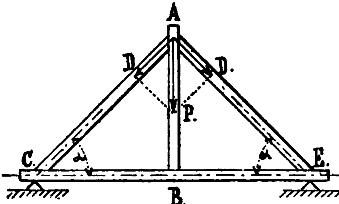


Fig. 40.

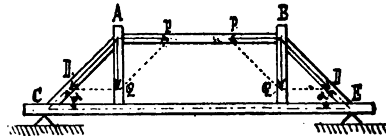


Fig. 41.

Lösungen: $D = Q\sqrt{2} = 8485\ kg$ und $P = Q = 6000\ kg.$

183. Wie gestalten sich aber die Resultate der vorigen Aufgabe, wenn $\alpha = 60^0$ ist?

Antwort: $D = \frac{2}{3} Q\sqrt{3} = 6928\ kg, P = \frac{1}{3} Q\sqrt{3} = 3464\ kg.$

184. Ferner, wenn $\alpha = 30^0$ ist?

Antwort: $D = 2\ Q = 12000\ kg, P = Q\sqrt{3} = 10392\ kg.$

§ 58.

Weitere Aufgaben über die Zerlegung von Kräften.

185. In Figur 42 erblicken wir einen einfach armierten Balken. Der Mittelpunkt *A* des letzteren ist durch einen Bock *A D* gestützt, welcher durch zwei schmiedeeiserne Stangen *B D* und *C D* gehalten wird. Ist nun allgemein $A D = h$ und $A B = A C = a$, so erzeugt eine in *A* vertikal abwärts wirkende

Last Q in den Zugstangen BD und CD zwei gleiche Spannungen, welche berechnet werden sollen.

Resultat: $S_1 = \frac{Q}{2h} \cdot \sqrt{a^2 + h^2}$.

186. Ebenso ermittele man die Spannungen in den drei Zugstangen des in Figur 43 dargestellten zweifach armierten Trägers, wenn wieder $A_1 D_1 = A_2 D_2 = h$, $A_1 B = A_2 C = a$ gegeben und die beiden Mittelstützen durch $Q_1 = Q_2 = Q$ belastet sind.

Resultate: $H_1 = H_2 = \frac{a}{h} Q$ und $S_1 = S_2 = \frac{Q}{h} \sqrt{a^2 + h^2}$.

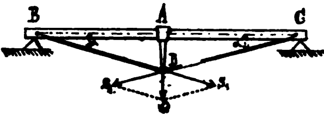


Fig. 42.

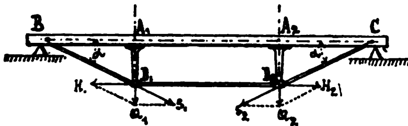


Fig. 43.

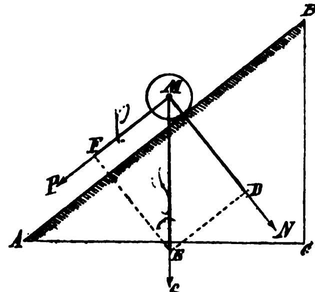


Fig. 44.

187. Die Neigung einer schiefen Ebene AB (Figur 44) gegen den Horizont AC kann durch zwei der Seiten $AC = b$, $CB = h$ und $BA = l$ eines rechtwinkligen Dreiecks ABC gemessen werden. Das Gewicht G eines darauf befindlichen Körpers, welches durch die Strecke ME dargestellt sein möge, äussert dann eine doppelte Wirkung, indem ein Druck N normal und eine Zugkraft P parallel AB entsteht. Es sollen diese beiden Komponenten berechnet werden.

Resultate: $N = \frac{b}{l} G$ und $P = \frac{h}{l} G$, worin $b^2 + h^2 = l^2$.

188. Beide Reaktionen für den besonderen Fall $b : h = 4 : 3$ anzugeben.

Resultate: $N = \frac{4}{5} G$ und $P = \frac{3}{5} G$.

189. Mit welcher Beschleunigung bewegt sich der Körper abwärts ohne Rücksicht auf Reibung und Luftwiderstand?

Antwort: Mit der Beschleunigung $p = \frac{h}{l} g = \frac{3}{5} g = 5{,}886 m.$

190. Wie gross stellt sich aber die Beschleunigung mit Berücksichtigung der Reibung heraus, wenn letztere den zehnten Teil des Normaldruckes beträgt?

Antwort: $p = \frac{10\,h - b}{10\,l} g = \frac{13}{25} g = 5{,}1012\,m = \sim 5{,}1\,m.$

191. Auf den nach Figur 45 eingeklemmten cylindrischen Körper wirkt eine Kraft $P = 200\,kg$, welche in der Achse angreift und mit dieser einen Winkel $\alpha = 25^0$ einschliesst. Man bestimme (durch Konstruktion) diejenigen beiden Kräfte P_1 und P_2, welche den Körper auf Zug, bzw. Biegung beanspruchen.

Resultate: $P_1 = 181\,kg$, $P_2 = 85\,kg$. Probe?

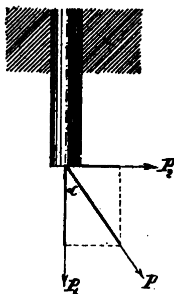


Fig. 45.

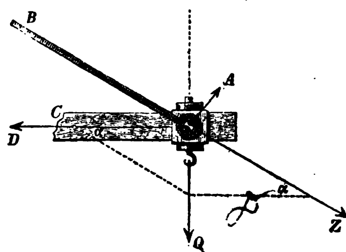


Fig. 46.

192. Im Punkte A der Figur 46 hängt eine Last $Q = 500\,kg$, welche teils vom horizontalen Balken $A\,C$, teils von der schmiedeeisernen Zugstange $A\,B$ aufgenommen wird. Man berechne den Druck D im Balken und den Zug Z in der Stange, wenn die beiden letzteren den Winkel $\alpha = 30^0$ einschliessen.

Resultate: $D = Q\sqrt{3} = 866\,kg$ und $Z = 2\,Q = 1000\,kg.$

193. Die Kräfteverteilung für $\alpha = 45^0$ und für $\alpha = 60^0$ zu berechnen.

Resultate: Man findet $D = Q = 500\,kg$ und $Z = Q\sqrt{2} = 707\,kg$, bzw. $D = \frac{Q}{3}\sqrt{3} = 288{,}675\,kg$ und $Z = \frac{2}{3}\,Q\sqrt{3} = 577{,}35\,kg.$

194. Es sollen ferner die durch Q hervorgerufenen Spannungen durch Konstruktion ermittelt werden, wenn $\alpha = 22^0$ ist.

Resultate: $D = 1240\ kg$ und $Z = 1330\ kg$.

195. Eine Dampfmaschine (Fig. 47) hat den Cylinderdurchmesser $D = 180\ mm$ und arbeitet mit einem grössten Dampfüberdruck von $5{,}6$ Atmosphären. Der Kolbendruck P zerlegt sich am Kreuzkopfe in zwei Komponenten, wovon die eine, N, rechtwinklig zur Kolbenstange und die andere, S, in der Längsachse der Schubstange ausgeübt wird. Beide Reaktionen werden am grössten, wenn die Schubstange mit der Kurbel einen rechten Winkel bildet, und sind für diesen Fall unter der Bedingung zu berechnen, dass die erstere fünf mal so lang als die letztere ist.

Resultate: Kolbendruck $P = 1425\ kg$, Normaldruck $N = 285\ kg$, Druck in der Schubstange $S = 1453\ kg$.

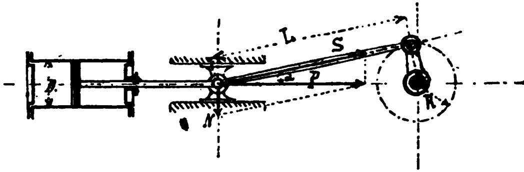


Fig. 47.

196. Man drücke N und S allgemein durch den Kolbendruck P, die Kurbellänge R und die Schubstangenlänge L aus.

Resultate: $N = \frac{R}{L} \cdot P$ und $S = P \cdot \frac{\sqrt{R^2 + L^2}}{L}$.

197. Endlich führe man in die letzten beiden Formeln den echten Bruch $\frac{R}{L} = \lambda$, d. i. das Verhältnis zwischen Kurbel- und Schubstangenlänge, ein.

Resultate: Man erhält $N = \lambda P$ und $S = P\sqrt{1 + \lambda^2}$.

198. Der in Fig. 48 skizzierte Steinkran ist bei A mit $Q = 1000\ kg$ belastet. Es frägt sich nun, welche Spannung S die Zugstange $B\,C$ erfährt, und welchen Druck P der Zapfen bei D auszuhalten hat.

Anleitung: Die Richtungslinie der in $B\,C$ wirkenden Kraft S schneidet die Wirkungslinie von Q in O, durch welchen Punkt auch die Belastung des Zapfens bei D geht.

Resultate: $S = 483\,kg$ und $P = 706\,kg$.

199. Letztere Kraft P soll wieder in Vertikaldruck V und Horizontalschub H zerlegt werden.

Resultate: $V = 632\,kg$ und $H = 315\,kg$.

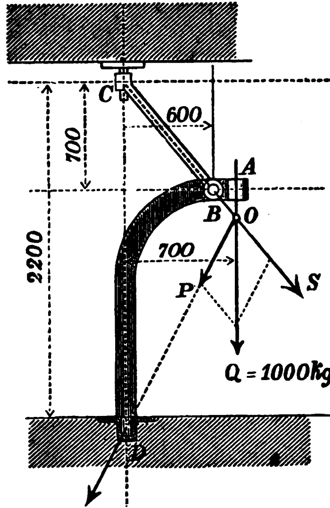


Fig. 48.

§ 59.

Zusammensetzung von Kräften nach vorausgegangener Zerlegung.

Jetzt haben wir auch die Mittel zu einer zweiten Methode der Zusammensetzung von Kräften, welche für später gewisse Vorteile darbietet.

Wirken nämlich beliebig viele Kräfte $P_1, P_2, P_3, P_4, \cdots$ in der Ebene auf denselben Punkt A, so ziehen wir durch letzteren eine horizontale und eine vertikale Achse, AX und AY, (Fig. 49) und zerlegen nun jede gegebene Kraft in zwei Komponenten, wovon die eine mit AX, die andere mit AY zusammenfällt, also $AB_1 = P_1$ in $AC_1 = H_1$ und $AD_1 = V_1$, $AB_2 = P_2$ in $AC_2 = H_2$ und $AD_2 = V_2$, $AB_3 = P_3$ in $AC_3 = H_3$ und $AD_3 = V_3$, $AB_4 = P_4$ in $AC_4 = H_4$ und $AD_4 = V_4, \cdots$; dann ist die Resultierende aller Horizontalkomponenten

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2 + \boldsymbol{H}_3 + \boldsymbol{H}_4 + \cdots, \quad \cdots\cdots\cdots \quad \mathbf{1.}$$

ferner die Mittelkraft aller Vertikalkomponenten

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + \cdots, \quad \ldots\ldots\ 2.$$

und folglich nach § 49, Formel 29 die Gesamtresultante aller gegebenen Kräfte P_1, P_2, P_3, $P_4 \cdots$

$$R = \sqrt{H^2 + V^2} \quad \ldots\ldots\ 3.$$

Dabei sind die Seitenkräfte $H_1, H_2, H_3, H_4 \cdots$ $V_1, V_2, V_3, V_4 \cdots$ mit ihren Vorzeichen einzuführen, d. h. positiv, wenn sie nach rechts oder nach unten, dagegen negativ, wenn sie nach links oder nach oben wirken und mithin sind die rechten Seiten von *1* und *2* im allgemeinen algebraische Summen.

Weil aber bekanntlich letztere unter Umständen auch Null sein können, so ist es denkbar, dass zugleich $H = 0$ und $V = 0$ wird.

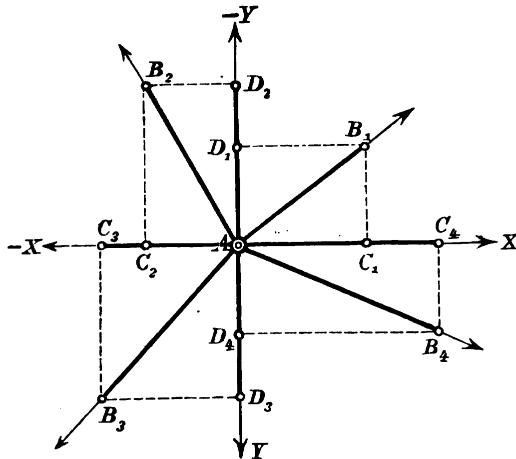


Fig. 49.

In diesem Falle ergiebt sich aus *3* auch $R = 0$, die sämtlichen Kräfte P_1, P_2, P_3, $P_4 \cdots$ heben sich demnach auf und wir gelangen zu dem wichtigen Ergebnis:

Beliebig viele denselben Punkt angreifende Kräfte in der Ebene halten sich das Gleichgewicht, wenn sowohl die algebraische Summe aller ihrer Horizontalkomponenten als auch diejenige aller ihrer Vertikalkomponenten gleich Null ist.

Fünftes Kapitel.

Kräfte in der Ebene mit verschiedenen Angriffspunkten.

§ 60.

Verlegung des Angriffspunktes. Gleichgewicht zweier Kräfte.

Nunmehr wenden wir uns zur Zusammensetzung solcher Kräfte, welche einen festen Körper in verschiedenen Punkten angreifen, und beginnen mit dem einfachsten Fall, wo zwei gleiche Kräfte $AC = BD = P$ (Fig. 50) in derselben Linie, aber nach entgegengesetzten Seiten wirken. Die unmittelbare Folge dieser beiden Kräfte wird allerdings eine Verrückung der einzelnen Körperteilchen sein; denn letztere werden sich nähern oder von einander entfernen, jenachdem die Kräfte den Körper auf Druck oder Zug beanspruchen, und der ganze Körper wird daher im ersten Falle zusammengepresst, im andern ausgedehnt werden. Allein die Formänderung, welche der Körper

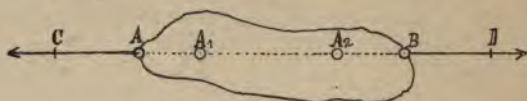


Fig. 50.

hierdurch erleidet, ist in den von uns zu betrachtenden Fällen so gering und erfolgt überdies in so kurzer Zeit, dass wir die Körper als vollkommen starr und demnach die gegenseitige Lage der Angriffspunkte als unveränderlich ansehen dürfen.

Nun ist weiter klar, dass sich die Wirkung einer Kraft $AC = P$ in ihrer Richtungslinie fortpflanzt und daher die nämliche sein muss, ob nun P in A oder A_1 oder A_2 oder in B angreift, wie z. B. ein Pferd auf einen Wagen dieselbe Wirkung ausübt, ob nun der Haken des Ortscheites direkt am Wagen befestigt oder ob er durch ein Seil mit letzterem verbunden ist; es gilt mithin der Satz: Die Wirkung einer Kraft bleibt dieselbe, wenn ihr Angriffspunkt in ihrer Richtungslinie beliebig verlegt wird und die Voraussetzung erfüllt ist, dass der neue mit dem alten Angriffspunkt in fester Verbindung steht.

Verschieben wir aber entweder $A\,C$ nach B oder auch $B\,D$ nach A, so tritt der am Schlusse des § 49 erwähnte Fall ein, und es besteht folglich der weitere Satz: Zwei gleiche Kräfte, welche in derselben Geraden auf zwei fest verbundene Punkte nach entgegengesetzten Seiten wirken, heben einander auf.

§ 61.

Zu einander geneigte Kräfte.

Mit Zuhilfenahme der beiden Sätze im vorigen Paragraphen sind wir jetzt auch imstande, zwei Kräfte $A\,D = P$ (Fig. 51) und $B\,E = Q$, welche in derselben Ebene liegen und auf zwei beliebige Punkte A, B eines festen Körpers wirken, zusammenzusetzen: wir verlegen dieselben einfach in ihren Wirkungslinien

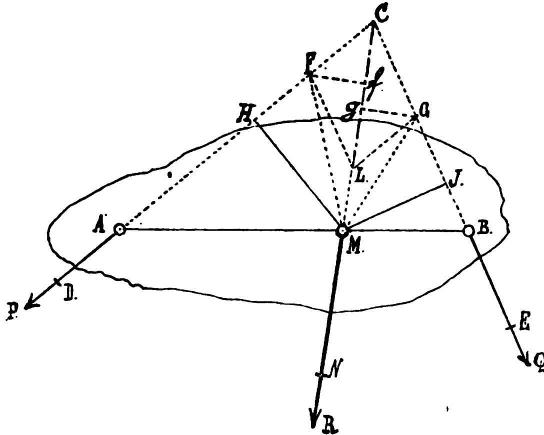


Fig. 51.

bis an den Schnittpunkt C der letzteren, machen also $C\,F = A\,D = P$, $C\,G = B\,E = Q$ und ergänzen $F\,C\,G$ zu einem Parallelogramm $F\,C\,G\,L$, dessen Diagonale $C\,L$ nach Grösse und Richtung die Resultierende der beiden Komponenten P und Q darstellt. Weil übrigens der Angriffspunkt der Resultante jeder andere Punkt in ihrer Richtungslinie sein kann, so verlegen wir ersteren nach M, sodass $M\,N = C\,L = R$ die Mittelkraft von $A\,D = P$ und $B\,E = Q$ repräsentiert.

Es ist schliesslich leicht einzusehen, wie man mit Hülfe des vorstehenden Verfahrens beliebig viele Kräfte, welche in einer

Ebene liegen und einen festen Körper in irgend welchen Punkten angreifen, zusammensetzen kann: man braucht nur die Resultante der beiden ersten Kräfte mit der dritten Kraft zu vereinigen, dann die hierdurch erzielte Resultierende der drei ersten Kräfte mit der vierten Komponente zu verbinden und so fortzufahren, bis man auch die letzte Seitenkraft berücksichtigt hat.

§ 62.
Übungsbeispiele.

200. Zwei Kräfte $P = 7\ kg$ und $Q = 10\ kg$ ergreifen die Endpunkte einer festen, einen Meter langen Strecke $A\ B$ und bilden mit den Verlängerungen der letzteren Winkel von 67^0 und 48^0. Man bestimme auf konstruktivem Wege die Resultante R, ferner den Winkel α zwischen P und R, sowie endlich den Punkt C, in welchem R die Gerade $A\ B$ schneidet.

Resultate: $R = 14{,}4\ kg$, $\alpha = 39^0$ und $A\ C = 54\ cm$.

201. Desgleichen, wenn die beiden Kräfte $P = 8\ kg$, $Q = 6\ kg$, die bezüglichen Winkel 30^0 und 60^0, sowie $A\ B = 120\ cm$ gegeben sind.

Resultate: $R = 10\ kg$, $\alpha = 37^0$ und $A\ C = 67{,}5\ cm$.

202. Die Kräfte $P = 12\ kg$ und $Q = 35\ kg$ schliessen mit den Verlängerungen von $A\ B$ Winkel von 36 und 54^0 ein; man soll die Grösse der Resultante durch Rechnung ermitteln.

Lösung: $R = 37\ kg$.

203. Ebenso, wenn $P = 65\ kg$, $Q = 72\ kg$ und die Winkel 23, bzw. 67^0 sind.

Resultat: $R = 97\ kg$.

§ 63.
Zusammensetzung zweier gleichgerichteter Parallelkräfte.

Das in § 61 angegebene Verfahren, zwei Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten konstruktiv zusammenzusetzen, versagt aber in dem Falle, wo beide Kräfte parallel sind, weil dann der Schnittpunkt der Wirkungslinien ins Unendliche fällt.

Um aber dennoch zum Ziele zu gelangen, benutzen wir zwei gleiche Hilfskräfte $A\ D = S = A'\ D' = S'$ (Fig. 52), welche

in der festen Verbindungsgeraden $A\,A'$ der Angriffspunkte beider paralleler Komponenten

$$A\,B = P \text{ und } A'\,B' = P',$$

jedoch nach entgegengesetzten Seiten wirken; dieselben heben nach § 60 einander auf und ändern mithin an der Wirkung unseres Kräftesystems nicht das geringste, sodass die Resultante der vier Kräfte P, S, P' und S' zugleich die Resultante unserer beiden parallelen Kräfte ist.

Nun stellen die Diagonalen $A\,E$ und $A'\,E'$ der Parallelogramme $A\,B\,E\,D$ und $A'\,B'\,E'\,D'$ die Resultierenden von P und S, resp. von P' und S' dar, folglich ist die gesuchte Mittelkraft von P und P' identisch mit der Mittelkraft von $A\,E$ und $A'\,E'$, wir könnten daher die letztere nach § 61 erhalten als Diagonale eines

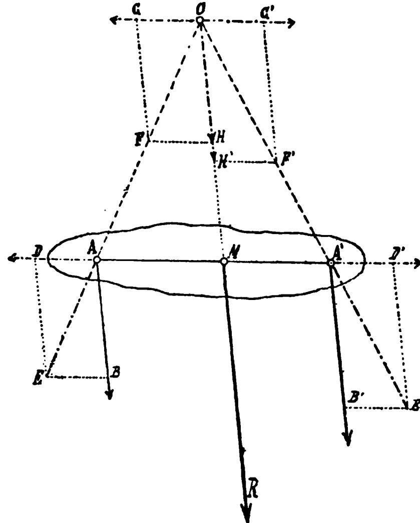


Fig. 52.

Parallelogramms, welches aus den Seiten $C\,F = A\,E$ und $C\,F' = A'\,E'$ zu verzeichnen wäre; allein da uns für diesen wichtigen Fall eine rein konstruktive Lösung der Aufgabe aus später ersichtlichen Gründen nicht genügen kann, so schlagen wir von hier ab einen anderen Weg ein: wir setzen die beiden Kräfte $C\,F$ und $C\,F'$ nicht zusammen, sondern zerlegen jede in zwei Komponenten, wovon die eine parallel zu $A\,A'$, die andere parallel zu $A\,B = P$, demnach auch parallel zu $A'\,B' = P'$ läuft,

nämlich CF mittels des Parallelogramms $CHFG$ in die Seitenkräfte CG und CH, sowie CF' durch das Parallelogramm $CH'F'G'$ in die beiden Komponenten CG' und CH'.

Jetzt ist einerseits wegen Kongruenz der Parallelogramme $CHFG$ und $ABED$

$$CG = AD = S, \; CH = AB = P$$

und andererseits wegen Kongruenz der Parallelogramme $CH'F'G'$ und $A'B'E'D'$

$$CG' = A'D' = S', \; CH' = A'B' = P'.$$

Weil aber nach Voraussetzung $S = S'$, folglich auch $CG = CG'$, so heben die letzteren zwei Kräfte, die in einer Linie und nach entgegengesetzten Seiten auf den Punkt C wirken, einander auf; mithin verbleiben die bewegenden Kräfte $CH = P$ und $CH' = P'$, welche, als in derselben Geraden und in demselben Sinne wirkend, sich summieren, und wir haben als Gesamtresultante

$$\boldsymbol{R = P + P'}.$$

Verlegen wir endlich den Angriffspunkt C von R nach M, so lässt sich letzterer Punkt folgendermassen bestimmen: Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CMA und CHF, sowie CMA' und $CH'F'$ folgen die Proportionen

$$CM : CH = MA : HF \text{ und } CM : CH' = MA' : H'F',$$

und hieraus die Produktengleichungen

$$CM \cdot HF = CH \cdot MA \text{ und } CM \cdot H'F' = CH' \cdot MA',$$

oder, wenn man nach obigem $HF = CG = S$, $H'F' = CG' = S'$, $CH = P$ und $CH' = P'$ substituiert:

$$CM \cdot S = P \cdot MA \text{ und } CM \cdot S' = P' \cdot MA'.$$

Wegen $S = S'$ ist aber auch $CM \cdot S = CM \cdot S'$ und demgemäss

$$P \cdot MA = P' \cdot MA',$$

oder in Form einer Proportion:

$$\boldsymbol{P : P' = MA' : MA}.$$

Die Zusammenfassung vorstehender Resultate führt zu dem wichtigen Satze: Die Mittelkraft zweier paralleler Komponenten, welche an den Endpunkten einer festen Strecke wirken, ist gleich der Summe der Komponenten, ausserdem parallel zu letzteren, und ihr Angriffspunkt, auch Mittelpunkt der parallelen Kräfte genannt, teilt die feste Strecke dergestalt, dass sich die Abschnitte umgekehrt verhalten wie die Kräfte, die an den Endpunkten wirken.

§ 64.

Übungsbeispiele.

204. Eine möglichst einfache Konstruktion für den Mittelpunkt O (Fig. 53) zweier paralleler Kräfte $AC = P$ und $BD = Q$ anzugeben.

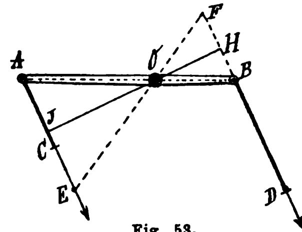


Fig. 53.

Auflösung: Macht man $AE = BD$ und verlängert BD um $BF = AC$, so schneidet die Verbindungsgerade EF die Strecke AB im gesuchten Punkte O. Beweis?

205. Wenn in der vorigen Aufgabe allgemein $AB = d$ gesetzt wird, wie gross berechnen sich die Abschnitte $AO = x$ und $OB = y$?

Antwort: $x = \frac{Qd}{P+Q}$ und $y = \frac{Pd}{P+Q}$.

206. Welche Resultate erhält man für die speziellen Zahlen $P = 7\ kg$, $Q = 15\ kg$ und $d = 44\ cm$?

Antwort: $x = 30\ cm$, $y = 14\ cm$.

207. Die Last $Q = 96\ kg$ in Figur 54 schliesst mit $OB = 40\ cm$ einen Winkel von 45^0 und die zu Q parallele Kraft P mit $OA = 128\ cm$ einen solchen von 30^0 ein. Wie gross muss P zur Herstellung des Gleichgewichtes gewählt werden und welcher Druck R wird im Punkte O ausgeübt?

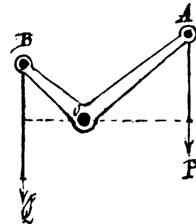


Fig. 54.

Antwort: $P = 30\sqrt{2} = 42{,}426\ldots = \sim 42{,}4\ kg$ und $R = 138{,}426\ldots = \sim 138{,}4\ kg$.

208. Wie gestalten sich aber die Resultate, wenn P mit OA einen Winkel von 60^0 bildet?

Antwort: $P = 10\sqrt{6} = 24{,}494\ldots = \sim 24{,}5\ kg$ und $R = 120{,}494\ldots = \sim 120{,}5\ kg$.

§ 65.

Zerlegung einer Kraft in zwei gleichgerichtete Parallelkomponenten.

Auf Grund der Ergebnisse des vorigen Paragraphen sind wir jetzt auch in den Stand gesetzt, eine gegebene Kraft P mit dem

Angriffspunkte A in zwei zu ihr parallele Seitenkräfte P_1 und P_2 zu zerlegen, wenn nur die Angriffspunkte A_1 und A_2 der letzteren mit A in fester Verbindung stehen.

Dabei kann man entweder die beiden Angriffspunkte A_1, A_2 oder einen Angriffspunkt und eine Komponente nach Gutdünken wählen; es müssen aber, wenn wir noch die drei Punkte A_1, A, A_2 in einer Geraden voraussetzen, unter allen Umständen die beiden Bedingungen

$$P = P_1 + P_2 \text{ und } A A_1 : A A_2 = P_2 : P_1$$

erfüllt sein.

Will man beispielsweise die Kraft $P = 120\,kg$ in zwei mit P parallele Kräfte derartig zerlegen, dass die Abschnitte $A A_1 = 4$ und $A A_2 = 11\,cm$ sind, so hat man zur Bestimmung der ersteren die Gleichungen

$$P_1 + P_2 = 120 \text{ und } P_2 : P_1 = 4 : 11.$$

Mit Einsetzung von $P_2 = 120 - P_1$ aus der linken in die rechte Gleichung ergiebt sich

$$(120 - P_1) : P_1 = 4 : 11 \text{ oder } 4\,P_1 = 11 \cdot (120 - P_1),$$
$$4\,P_1 = 1320 - 11\,P_1,\; 15\,P_1 = 1320,$$

also

$$P_1 = 88\,kg \text{ und } P_2 = 32\,kg.$$

Wenn man dagegen P in zwei Komponenten zerlegen wollte, wovon die eine, P_1, $40\,kg$ betragen und den Abschnitt $A A_1 = 18\,cm$ bilden soll, so hätten wir zunächst $P_2 = P - P_1 = 120 - 40 = 80\,kg$. Um ferner den Abschnitt $A A_2 = x$ zu erfahren, bedienen wir uns der Proportion

$$80 : 40 = 18 : x \text{ oder } 2 : 1 = 18 : x$$

und erhalten

$$x = 9\,cm.$$

§ 66.

Übungsbeispiele.

209. Statt einer Kraft $P = 180\,kg$, deren Angriffspunkt A den festen Stab $A_1 A_2$ in dem Verhältnis $2 : 7$ teilt, will man zwei zu P parallele Kräfte P_1 und P_2, welche den Stab an seinen Endpunkten erfassen. Wie gross müssen dieselben gewählt werden?

Antwort: $P_1 = 140\,kg$, $P_2 = 40\,kg$.

210. Zwei Arbeiter A und B tragen an einem hölzernen Riegel eine Last von $140\,kg$. Wie verteilt sich letztere auf beide Arbeiter, wenn der Aufhängepunkt von A drei viertel und von B einen Meter entfernt ist?

Antwort: A hat $80\,kg$ und B nur $60\,kg$ zu tragen.

211. Ein Mann fährt auf einem Schiebkarren eine Last von *230 kg*, deren Angriffspunkt von der Radachse $\frac{1}{3}$ *m* und von der Verbindungslinie der beiden Hände *1,2 m* entfernt ist. Welche Drücke haben einerseits der Mann und andererseits die Radzapfen auszuhalten?

Antwort: *50 kg*, bezw. *180 kg*.

212. Es soll eine Kraft $P = 230\ kg$ derartig in zwei zu ihr parallele Seitenkräfte P_1, P_2 zerlegt werden, dass deren Angriffspunkte A_1, A_2 mit dem Angriffspunkte A von P in einer Geraden liegen, dass ferner $P_1 = 85\ kg$ und $AA_1 = a_1 = 29\ cm$ wird. P_2 und $AA_2 = x$ sind anzugeben.

Resultate: $P_2 = P - P_1 = 145\ kg$ und $x = \frac{a_1 P_1}{P - P_1} = 17\ cm$.

§ 67.

Zusammensetzung zweier entgegengesetzt gerichteter Parallelkräfte.

Die beiden Kräfte $A_1 C_1 = P_1$ und $A_2 C_2 = P_2$ sollen wieder parallel sein, aber in den Punkten A_1 und A_2 nach entgegen-

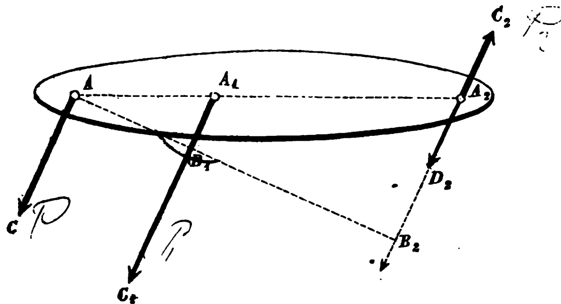


Fig. 55.

gesetzten Seiten auf den in Figur 55 dargestellten Körper einwirken.

Um die Resultierende ausfindig zu machen, zerlegen wir die grössere Kraft P_1 in zwei mit ihr gleichgerichtete Parallelkomponenten, wovon die eine $A_2 D_2 = P_2$ ist und in A_2 angreift.

Dann muss nach dem vorigen Paragraphen die andere Komponente

$$AC = P_1 - P_2$$

sein und ihr Angriffspunkt A muss auf der Verlängerung von $A_2 A_1$ so liegen, dass die Proportion

$$(P_1 - P_2) : P_2 = A_1 A_2 : A_1 A$$

erfüllt ist. Weil aber in jeder Verhältnisgleichung die Summe der beiden ersten Glieder zum zweiten sich verhält, wie die Summe der beiden letzten zum vierten, so kann man auch schreiben

$$(P_1 - P_2 + P_2) : P_2 = (A_1 A_2 + A_1 A) : A_1 A$$

oder, weil $A_1 A_2 + A_1 A = A A_2$ ist,

$$P_1 : P_2 = A A_2 : A A_1.$$

Bedenkt man jetzt, dass die Kraft P_1 durch ihre beiden Komponenten $A_2 D_2 = P_2$ und AC ersetzt wird, dass sich ausserdem die beiden gleichen und in derselben Linie nach verschiedenen Seiten wirkenden Kräfte $A_2 D_2'$, $A_2 C_2$ gegenseitig aufheben, so bleibt nur AC wirksam, und es gilt der Satz: Die Resultante zweier entgegengesetzter Parallelkräfte P_1 und P_2 mit fest verbundenen Angriffspunkten A_1 und A_2 ist

$$\boldsymbol{R = P_1 - P_2}, \quad \cdots\cdots \quad \mathit{1.}$$

geht parallel zu den Komponenten, und ihr Angriffspunkt A liegt in der Verlängerung von $A_1 A_2$ auf Seite der grösseren Kraft P_1 derart, dass die Proportion

$$\boldsymbol{P_1 : P_2 = A A_2 : A A_1} \quad \cdots\cdots \quad \mathit{2.}$$

besteht.

Wenn A unterstützt ist, so kommt R blos als Druck auf die Unterlage zur Geltung und die beiden Parallelkräfte P_1, P_2 halten sich das Gleichgewicht.

§ 68.

Vom Kräftepaar.

Werden aber die Parallelkräfte P_1, P_2, welche einen festen Körper in den Punkten A_1, A_2 angreifen und nach entgegengesetzten Seiten wirken, speziell einander gleich, gilt also

$$\boldsymbol{P_2 = P_1 = P},$$

so erhalten wir aus Formel 1 des vorigen Paragraphen ihre Resultante

$$R = 0,$$

das heisst: es giebt für diese beiden Kräfte keine Resultante und mithin kann der Körper keine fortschreitende Bewegung annehmen. Allein aufheben können sich die Kräfte auch nicht, weil sie in verschiedenen Linien wirken; es bleibt daher nur übrig, dass A_1 im Sinne des Uhrzeigers und A_2 nach der anderen Seite fortrückt: der Körper muss also unter dem Einflusse zweier solcher Kräfte eine Drehbewegung ausführen.

Deshalb nennt man zwei gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte mit fest verbundenen Angriffspunkten ein Drehungspaar oder Kräftepaar, auch kurzweg ein Paar.

Die Entfernung beider Angriffspunkte heisst der Arm, der senkrechte Abstand der Kraftlinien die Breite und das Produkt aus der Breite und einer Kraft das statische Moment des Kräftepaares.

Letzteres ist von besonderer Wichtigkeit insofern, als es die Drehbestrebung misst, welche das Kräftepaar auf den Körper ausübt.

Nehmen wir beispielsweise an, dass auf einem bestimmten Körper erst ein Paar mit der Breite = *2,5 m*, und zwei Kräften von je *6 kg*, dann aber ein zweites Paar mit der Breite von einem Meter und den Kräften von je *5 kg* — jedes für sich allein — wirkt, so ist das Moment des ersten

$$M_1 = 2{,}5 \cdot 6 = 15 \text{ Kilogrammmeter},$$

dagegen das Moment des zweiten

$$M_2 = 1 \cdot 5 = 5 \text{ Kilogrammmeter};$$

mithin ist das Drehbestreben des ersten Kräftepaares genau dreimal so gross, als dasjenige des zweiten.

Sechstes Kapitel.

Von den statischen Momenten der Kräfte.

§ 69.

Moment einer Kraft in Bezug auf einen Punkt.

Wenn ein von der Kraft $A B = P$ (Fig. 56) beeinflusster Körper K in dem ausserhalb der Wirkungslinie von P liegendem Punkte O festgehalten wird, so sucht P den Körper zu drehen und zwar muss diese Drehbestrebung um so bedeutender aus-

fallen, je grösser erstens die Kraft P selbst und je grösser zweitens ihr Abstand OC von O ist; es bietet sich daher als geeignetes Mass für die Stärke der Drehung das Produkt aus P und OC dar.

Der feste Punkt O heisst Drehpunkt oder Momentenpunkt, das Lot $OC = p$, welches von O auf die Wirkungslinie von P

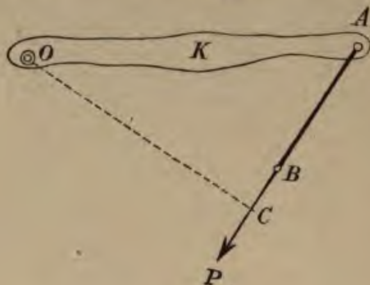


Fig. 56.

gefällt werden kann, nennt man den Hebelsarm von P und das Produkt Pp aus Kraft und Hebelsarm führt den Namen »statisches Moment der Kraft P in Bezug auf den Punkt O«.

Drückt man den Hebelsarm p in Metern aus, so hat das Moment Pp die Benennung »Meterkilogramm« (*mkg*), z. B. würde eine Kraft $P = 7\ kg$ mit dem Hebelsarm $p = 4\ m$ das Moment $Pp = 28\ mkg$ besitzen; doch ist bei Anwendungen die Wahl der Längeneinheit für p gleichgültig, sobald man nur bei ein und derselben Untersuchung die Hebelsarme sämtlicher Kräfte mit gleicher Längenbenennung einführt, d. h. die Arme aller Kräfte entweder nur mit dem Meter, oder blos mit dem Dezimeter oder lediglich mit dem Centimeter misst.

Ferner ist zu bemerken, dass man den Momenten der Kräfte verschiedene Vorzeichen beilegt, wenn letztere den Körper in verschiedener Richtung um den Momentenpunkt zu drehen suchen. Es ist üblich geworden, die Momente solcher Kräfte, welche im Sinne des Uhrzeigers wirken, positiv und mithin die Momente der entgegengesetzt drehenden Kräfte negativ zu setzen.

Endlich sieht man leicht ein, dass das Moment jeder durch den Drehpunkt gehenden Kraft P Null sein muss, weil dann der Hebelsarm p und mithin auch das ganze Moment Pp gleich Null ist; in der That bringt in diesem Falle die Kraft nur einen

Druck auf den unterstützten Momentenpunkt hervor, welcher durch einen gleich grossen Gegendruck aufgehoben wird.

Demnach wäre z. B. (Fig. 57) in Bezug auf den Drehpunkt O das Moment der Kraft $P_1 = 12\ kg$ mit dem Hebelsarm $O\,C_1 = p_1 = 3\ m$

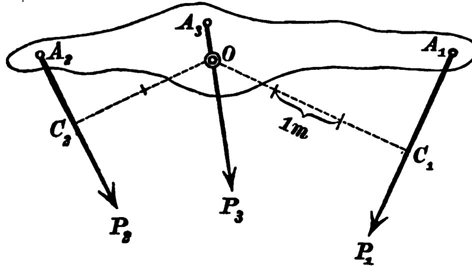


Fig. 57.

$$M_1 = P_1\,p_1 = 12 \cdot 3 = +\,36\ mkg,$$

weiter das Moment von $P_2 = 9\ kg$ mit dem Arm $O\,C_2 = p_2 = 2\ m,$

$$M_2 = P_2\,p_2 = -\,9 \cdot 2 = -\,18\ mkg,$$

und das Moment der Kraft P_3

$$M_3 = 0,$$

weil diese durch den Momentenpunkt O geht.

§ 70.

Der Momentensatz für zwei Kräfte.

Greifen zwei Kräfte $A_1\,B_1 = P_1$ und $A_2\,B_2 = P_2$ (Fig. 58) einen festen Körper in den beiden Punkten A_1 und A_2 an, so erhält man nach § 61 die Resultante R als Diagonale $A\,B$ eines Parallelogrammes $A\,C_1\,B\,C_2$, welches jene beiden Komponenten zu anstossenden Seiten hat. Es stellt also $CD = AB = R$ die Resultante von P_1 und P_2 dar, wenn $A\,C_1 = A_1\,B_1 = P_1$ und $A\,C_2 = A_2\,B_2 = P_2$ ist.

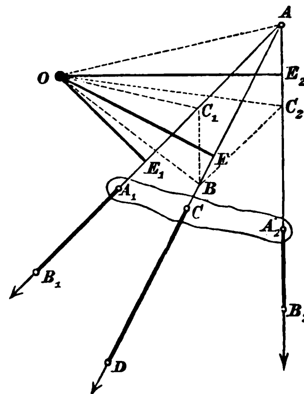


Fig. 58.

Nun beweist die Planimetrie, dass die von einem ganz beliebigen Punkt O aus gezogenen Linien $O\,A$ und $O\,B$ mit der Diagonalen des Parallelogramms ein Dreieck $O\,A\,B$ bilden, welches entweder gleich der Summe oder gleich der

Differenz der beiden Dreiecke OAC_2 und OAC_1 ist, je nachdem der Punkt O ausserhalb oder innerhalb des Winkels B_1AB_2 sich befindet, in welchem das Parallelogramm liegt.*)

*) Da dieser Satz in nur wenigen geometrischen Lehrbüchern sich vorfindet, so wollen wir ihn hier für beide Fälle beweisen.

Im ersten Falle ist unmittelbar aus Figur I ersichtlich, dass

$$\text{Dreieck } OAB = \text{Dr. } OAD + \text{Dr. } ODB - \text{Dr. } DBA$$

ist. Nun folgt aber aus

$$\text{Dr. } ODB = \frac{BD}{2} \cdot EO \text{ und Dr. } DBA = \frac{BD}{2} \cdot EF$$

durch Subtraktion

$$\text{Dr. } ODB - \text{Dr. } DBA = \frac{BD}{2} \cdot (EO - EF) = \frac{BD}{2} \cdot FO = \text{Dr. } OAC$$

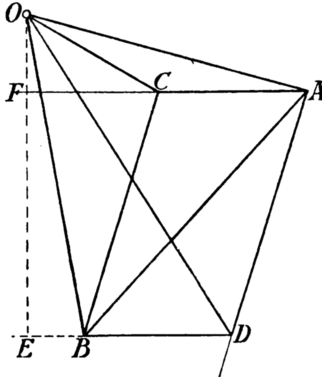


Fig. I.

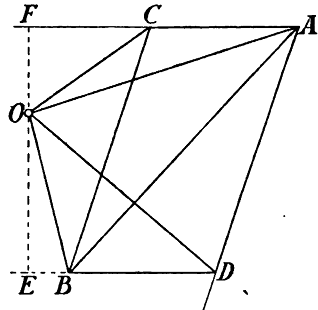


Fig. II

und mit Einführung dieser letzten in die erste Beziehung

$$\textbf{Dreieck } OAB = \textbf{Dreieck } OAD + \textbf{Dreieck } OAC,$$

w. z. b. w.

Im zweiten Falle haben wir mit Rücksicht auf Fig. II zunächst wie vorhin

$$\text{Dreieck } OAB = \text{Dr. } OAD + \text{Dr. } ODB - \text{Dr. } DBA,$$

worin wieder

$$\text{Dr. } ODB = \frac{BD}{2} \cdot EO \text{ und Dr. } DBA = \frac{BD}{2} \cdot EF,$$

dagegen ergiebt sich jetzt hieraus

$$\text{Dr. } BDA - \text{Dr. } ODB = \frac{BD}{2} \cdot (EF - EO) = \frac{BD}{2} \cdot OF = \text{Dr. } OAC$$

und es geht daher mit Benutzung dieses Wertes die erste Gleichung über in

$$\textbf{Dreieck } OAB = \textbf{Dreieck } OAD - \textbf{Dreieck } OAC.$$

Im ersteren Falle wäre demnach

$$\text{Dreieck } OAB = \text{Dreieck } OAC_2 + \text{Dreieck } OAC_1$$

oder, wenn wir von O aus die Perpendikel $OE = r$, $OE_1 = p_1$, $OE_2 = p_2$ auf AB, AB_1, AB_2 fällen und berücksichtigen, dass der Flächeninhalt eines Dreieckes gleich dem halben Produkte aus Grundlinie und Höhe ist,

$$\frac{1}{2} AB \cdot r = \frac{1}{2} AC_2 \cdot p_2 + \frac{1}{2} AC_1 \cdot p_1$$

und hieraus, da nach obigem $AB = R$, $AC_2 = P_2$ und $AC_1 = P_1$ gesetzt werden kann,

$$\boldsymbol{R r = P_2 p_2 + P_1 p_1}.$$

Im zweiten Falle, wenn O zwischen den Richtungslinien der Kräfte liegt, gilt

$$\text{Dreieck } OAB = \text{Dreieck } OAC_2 - \text{Dreieck } OAC_1,$$

das ist

$$\frac{1}{2} AB \cdot r = \frac{1}{2} AC_2 \cdot p_2 - \frac{1}{2} AC_1 \cdot p_1$$

oder

$$\boldsymbol{R \cdot r = P_2 p_2 - P_1 p_1}.$$

Da wir aber in Rr, $P_2 p_2$ und $P_1 p_1$ die statischen Momente der Kräfte R, P_2 und P_1 erkennen, so besteht mit Rücksicht auf die Vorzeichen der Momente in beiden Fällen der Satz: Wirken zwei Kräfte an einem festen Körper, so ist in Bezug auf jeden nach Gutdünken gewählten Punkt das statische Moment der Resultante gleich der algebraischen Summe der statischen Momente ihrer beiden Komponenten.

Von hervorragender Bedeutung ist aber der besondere Fall, wo der Momentenpunkt auf der Wirkungslinie von R liegt; denn dann ist wegen $r = 0$ auch das statische Moment der Resultante gleich Null und folglich kann keine Drehung entstehen. Es tritt aber auch keine fortschreitende Bewegung ein, wenn gleichzeitig der Momentenpunkt O unterstützt ist, weil dann die Resultante lediglich als Druck zur Geltung kommt. Wir haben demnach den weiteren Lehrsatz:

Zwei Kräfte halten sich an einem um einen Punkt oder eine Achse drehbaren Körper das Gleichgewicht,

wenn die algebraische Summe ihrer statischen Momente in Bezug auf den Drehpunkt gleich Null ist; der Druck auf den Drehpunkt ist dabei gleich der Resultante beider Kräfte.

Erläuterungsbeispiel. An dem in Figur 59 zur Anschauung gebrachten und um O drehbaren Körper hängt eine Last Q, welche durch die im Punkte A angreifende Kraft P im Gleichgewicht erhalten werden soll; die Hebelsarme von P und Q sind $OA = p$ und $OB = q$. Man berechne P und den in O herrschenden Druck R, erst allgemein und dann für die speziellen Zahlenwerte $p = 750\ mm$, $q = 400\ mm$ und $Q = 1000\ kg$.

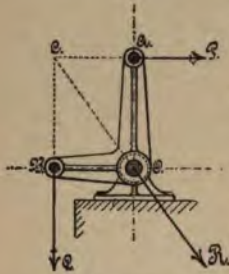


Fig. 59.

Auflösung: Hier ist die Gleichgewichtsbedingung

$$Pp - Qq = 0,$$

woraus folgt

$$P = \frac{Qq}{p} = \frac{1000 \cdot 400}{750} = \frac{1600}{3} = 533\,{}^1/_3\ kg.$$

Verlegen wir jetzt P und Q in ihren Richtungslinien an den Schnittpunkt C, so ergiebt sich nach Formel 29 in § 49 die Resultierende

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{\left(\frac{1600}{3}\right)^2 + (1000)^2} = 1133\,{}^1/_3\ kg,$$

und das ist der Druck auf den Drehpunkt O.

§ 71.

Der Momentensatz für beliebig viele Kräfte.

Es lässt sich leicht zeigen, dass die soeben entwickelten beiden Lehrsätze, wovon der zweite nur einen speziellen Fall des ersten betrifft, auch noch für mehr als zwei Kräfte gelten; denn greifen z. B. die vier in derselben Ebene liegenden Kräfte P_1, P_2, P_3 und P_4 die Punkte A_1, A_2, A_3 und A_4 eines festen Körpers an, denken wir uns dann in der genannten Ebene irgendwo den Punkt O, dessen Abstände von den Wirkungslinien jener Kräfte p_1, p_2, p_3 und p_4 sein mögen, bezeichnen wir ferner die Resultante von P_1 und P_2 mit R_1, ihren Abstand von O mit r_1,

sodann die Resultante von R_1 und P_3, das ist zugleich die Resultante von P_1, P_2 und P_3, mit R_2, ihren Hebelsarm mit r_2 und endlich die Resultante von R_2 und P_4, das ist zugleich die Gesamtresultante aller vier Kräfte P_1, P_2, P_3 und P_4, mit R, ihren Hebelsarm mit r, so bestehen nach dem vorigen Paragraphen die drei Gleichungen

$$R_1 r_1 = P_1 p_1 + P_2 p_2,$$
$$R_2 r_2 = R_1 r_1 + P_3 p_3,$$
$$R\ r\ = R_2 r_2 + P_4 p_4.$$

Setzt man aber jetzt den Wert von $R_1 r_1$ aus der ersten in die zweite und den hierdurch entstandenen Wert von $R_2 r_2$ in die dritte Beziehung ein, so ergiebt sich

$$R r = P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + P_4 p_4$$

und da offenbar die vorstehenden Schlussfolgerungen auch auf eine beliebige Anzahl von Kräften ausgedehnt werden können, so gelangen wir zu dem Lehrsatze:

Für beliebig viele Kräfte in der Ebene, deren Angriffspunkte untereinander fest verbunden sind, ist das statische Moment der Resultante in Bezug auf irgend einen Punkt O jener Ebene gleich der algebraischen Summe der statischen Momente aller Einzelkräfte in Bezug auf denselben Punkt O.

Man kann sich auch hier wieder den besonderen Fall vorstellen, dass der Momentenpunkt O auf die Wirkungslinie von R fällt und zugleich festgehalten wird.

Dann ist ebenfalls weder eine drehende noch eine fortschreitende Bewegung möglich und es gilt der Satz:

Beliebig viele in derselben Ebene wirkende Kräfte halten sich an jedem um einen Punkt der nämlichen Ebene drehbaren festen Körper das Gleichgewicht, wenn die Summe der Momente aller Kräfte hinsichtlich des Drehpunktes gleich Null ist.

Erläuterungsbeispiel: Die vier Kräfte $P_1 = 9\ kg$, $P_2 = 5\ kg$, $P_3 = 13\ kg$ und $P_4 = 10\ kg$ wirken an den Armen von *3*, *2*, *5*, sowie *4,5 dm* und sollen durch eine Kraft x am

Hebelsarm von *1 m* im Gleichgewicht gehalten werden (Fig. 60). Wie gross muss x sein und nach welcher Seite muss es wirken?

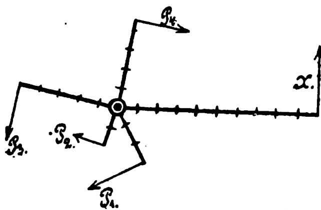


Fig. 60.

Lösung: Aus der Momentengleichung

$$9 \cdot 3 + 5 \cdot 2 - 13 \cdot 5 + 10 \cdot 4{,}5 + x \cdot 10 = 0$$

ergiebt sich

$$10\,x = -82 + 65 = -17$$

oder

$$x = -\,1{,}7\ kg,$$

und wir erkennen daraus, dass die gesuchte Kraft *1,7 kg* betragen und — wegen des negativen Vorzeichens — im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers wirken muss.

§ 72.

Die statischen Momente von Parallelkräften in Bezug auf einen Punkt.

Es könnte vielleicht einem Bedenken unterliegen, ob das Momentengesetz auch für parallele Kräfte gilt; denn wenn auch die parallele Lage von Linien in gewissem Sinne als ein Spezialfall

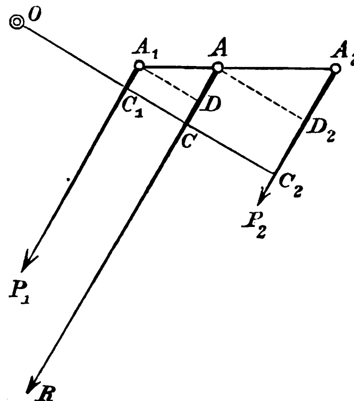


Fig. 61.

der geneigten Lage angesehen werden kann, so bildet die erstere doch wieder insofern eine Ausnahme, als der Schnittpunkt der Linien ins Unendliche fällt, weshalb wir auch die Zusammensetzung der parallelen Kräfte in § 63 besonders vornehmen mussten.

Um nun jeden Zweifel darüber zu lösen, leiten wir den Momentensatz für diesen Fall ebenfalls direkt ab und stützen uns

dabei auf den in § 63 entwickelten Lehrsatz, dass die Resultante R zweier Parallelkräfte P_1 und P_2 mit fest verbundenen Angriffspunkten parallel und gleich der Summe von P_1 und P_2 ist und dass ihr Angriffspunkt A (Fig. 61) die Strecke $A_1 A_2$ nach der Proportion

$$A A_1 : A A_2 = P_2 : P_1$$

teilt. Fällen wir jetzt von einem in der Ebene beliebig angenommenen Punkt O, sowie auch von A_1 und A Lote auf die Wirkungslinie der Kraft P_2 und setzen $O C_1 = p_1$, $O C = r$ und $O C_2 = p_2$, so besteht wegen der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke $A_1 D A$ und $A D_2 A_2$ die Proportion

$$A_1 D : A D_2 = A A_1 : A A_2 = P_2 : P_1,$$

oder, weil $A_1 D = C_1 C = O C - O C_1 = r - p_1$ und $A D_2 = C C_2 = O C_2 - O C = p_2 - r$ ist,

$$(r - p_1) : (p_2 - r) = P_2 : P_1,$$
$$P_1 r - P_1 p_1 = P_2 p_2 - P_2 r,$$
$$(P_1 + P_2) r = P_1 p_1 + P_2 p_2.$$

Hieraus folgt, da nach obigem

$$\boldsymbol{R = P_1 + P_2} \quad \cdots\cdots\cdots \quad \mathit{1.}$$

sein muss,

$$\boldsymbol{R r = P_1 p_1 + P_2 p_2}, \quad \cdots\cdots\cdots \quad \mathit{2.}$$

und es gilt mithin das in § 70 ausgesprochene Momentengesetz auch für zwei Parallelkräfte.

Dieses Gesetz lässt sich aber, indem man es wiederholt anwendet, ohne jede Schwierigkeit erweitern auf beliebig viele parallele Kräfte

$$P_1, P_2, P_3, P_4, \cdots P_n,$$

deren Angriffspunkte untereinander fest verbunden sind und welche von einem in der Kräfteebene beliebig gedachten Punkte O die Abstände

$$p_1, p_2, p_3, p_4 \cdots p_n,$$

besitzen mögen; denn man erhält hierdurch die beiden Formeln

$$\boldsymbol{R = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n} \quad \cdots\cdots\cdots \quad \mathit{3.}$$

und

$$\boldsymbol{R r = P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + \cdots + P_n p_n} \quad \cdots \quad \mathit{4.}$$

worin der Satz liegt: Für beliebig viele parallele Kräfte in der Ebene, deren Angriffspunkte unter einander fest verbunden sind, ist die Resultante gleich der Summe aller Komponenten und das statische Moment der Resultante in Bezug auf einen (beliebig gedachten) Punkt in derselben Ebene gleich der (algebraischen) Summe der statischen Momente aller Einzelkräfte, bezogen auf den nämlichen Punkt.

Mit Hilfe dieses Satzes kann für ein System von Parallelkräften, deren Angriffspunkte in einer Geraden liegen, die Resultante leicht ermittelt werden, wie folgender Fall zeigt.

An den Enden A, B und in der Mitte C eines eisernen, $4\,m$ langen Stabes $A\,B$ (Fig. 62) hängen die drei Lasten $P = 52\,kg$, $Q = 81\,kg$ und $G = 210\,kg$ (Eigengewicht des Stabes). Ausserdem wirken noch die drei Kräfte $P_1 = 231\,kg$, $P_2 = 220\,kg$ und $P_3 = 206\,kg$ in den Abständen $A\,A_1 = 1\,m$, $A\,A_2 = 2{,}5\,m$ $A\,A_3 = 3\,m$, alle senkrecht abwärts. Man soll Grösse und Angriffspunkt der Mittelkraft bestimmen.

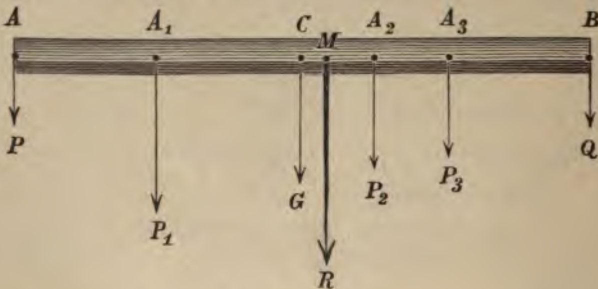


Fig. 62.

Zunächst ergiebt sich leicht die Resultante

$$R = 52 + 231 + 210 + 220 + 206 + 81 = \mathbf{1000\,kg}.$$

Um den Abstand $A\,M = x$ ihres Angriffspunktes M von A zu erhalten, wählen wir A zum Momentenpunkte und setzen in Formel 4 unsere Zahlenwerte ein. Aus

$$1000\,x = 52 \cdot 0 = 231 \cdot 1 + 210 \cdot 2 + 220 \cdot 2{,}5 + 206 \cdot 3 + 81 \cdot 4$$

oder

$$1000\,x = 231 + 420 + 550 + 618 + 324 = 2143$$

folgt dann

$$\boldsymbol{x = 2{,}143\,m},$$

der Abstand des Kräftemittelpunktes von A.

Ebensogut hätten wir jeden anderen Punkt, z. B. B oder C als Momentenpunkt wählen können und wären dadurch genau zu demselben Ergebnis gekommen. Als Probe hierfür und um auch Momente mit verschiedenen Vorzeichen zu erhalten, mag zweitens C Momentenpunkt, sowie $CM = y$ sein.

In diesem Falle lautet die Momentengleichung

$$1000\,y = -104 - 231 + 110 + 206 + 162 = 143$$

und es ergiebt sich

$$y = 0{,}143\ m,$$

was mit dem obigen Resultate für x harmoniert.

Wenn in den obigen Beziehungen 3. und 4. spezieller Weise sowohl R als auch $R\,r$ Null sind, so können die Parallelkräfte weder eine fortschreitende, noch eine drehende Bewegung herbeiführen und hieraus folgt: Beliebig viele parallele Kräfte, welche in einerlei Ebene auf einen starren Körper wirken, halten sich das Gleichgewicht, sobald erstens ihre Summe und zweitens die Summe ihrer statischen Momente in Bezug auf einen irgendwo in der Kräfteebene angenommenen Punkt gleich Null ist.

§ 73.

Ermittelung von Auflagerdrücken.

Der letzte Satz befähigt uns zur Lösung einer Gattung von Aufgaben, die in der Praxis häufig vorkommen. Ruht nämlich ein von mehreren parallelen (gewöhnlich vertikalen) Kräften beanspruchter Körper auf Unterstützungspunkten, so finden in den letzteren gewisse Drücke statt, welche durch gleich grosse Gegendrücke (Reaktionen) aufgehoben werden.

Um aber diese Reaktionen zu erhalten, braucht man nur in Bezug auf die Stützpunkte die algebraische Summe der statischen Momente aller wirkenden Kräfte gleich Null zu setzen; denn man erhält hierdurch Gleichungen, aus welchen sich die gesuchten Werte berechnen lassen. Schliesslich kann man auch noch eine Probe auf die Richtigkeit der Resultate anstellen, indem die (algebraische) Summe der Reaktionen mit derjenigen der Parallelkräfte übereinstimmen muss.

Die Art und Weise der Ausführung wollen wir noch an den folgenden Beispielen zeigen.

Erstens. Ein eiserner Träger von der Länge $AB = l$ (Fig. 63) und dem (in der Mitte C angreifenden) Gewichte G sei in den Endpunkten A und B unterstützt. Man soll nun die Drücke X und Y in den letzteren ermitteln, wenn in den Abständen $AD = p$ und $AE = q$ die Lasten P und Q wirken.

Auflösung: Wählt man vorerst B zum Momentenpunkte, so besteht nach obigem die Gleichung

$$Xl - P(l-p) - Q(l-q) - G\frac{l}{2} = 0,$$

woraus folgt

$$X = P + Q + \frac{G}{2} - \frac{Pp + Qq}{l}.$$

Nimmt man dann A als Momentenpunkt an, so ist

$$Yl - Pp - Qq - G\frac{l}{2} = 0$$

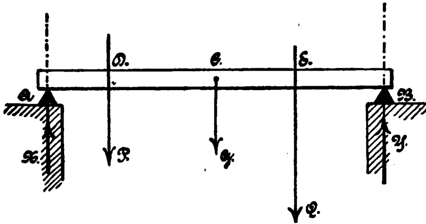
und mithin

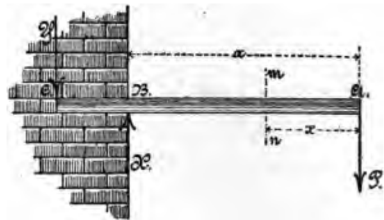
$$Y = \frac{G}{2} + \frac{Pp + Qq}{l}.$$

Die Addition der beiden vorstehenden Gleichungen für X und Y ergiebt

$$X + Y = P + Q + G,$$

wie es sein muss.


Fig. 63.


Fig. 64.

Zweitens. Ein dem vorigen ganz gleicher Träger AC (Fig. 64) wird mit dem einen Ende $BC = l - a$ in Mauerwerk eingelassen und an dem freien Ende, in A, durch ein Gewicht P belastet. Wie hoch berechnen sich hier die Reaktionen X und Y in den Punkten B und C?

Auflösung: In Bezug auf den Punkt C hat man nach dem Momentensatze

$$X(l-a) - G\frac{l}{2} - Pl = 0$$

oder

$$X = \left(P + \frac{G}{2}\right)\frac{l}{l-a}$$

und in Bezug auf B als Momentenpunkt

$$Y(l-a) - Pa - G\left(a - \frac{l}{2}\right) = 0$$

oder

$$Y = \frac{2\,Pa + G\,(2\,a - l)}{2\,(l - a)}.$$

Weil hier die Drücke entgegengesetzt wirken, so muss ihre Differenz gleich der Summe der abwärts gerichteten Kräfte sein; in der That erhält man durch Subtraktion der letzten von der drittletzten Gleichung

$$X - Y = P + G.$$

Wie schon diese beiden Fälle erkennen lassen, ist es bei Berechnung von Auflagerdrücken am vorteilhaftesten, immer einen der Druckpunkte als Momentenpunkt zu wählen, weil man dann zwei Gleichungen mit je nur einer Unbekannten X und Y erhält; allein es wurde bereits früher erwähnt und soll hier nochmals besonders hervorgehoben werden, dass der Momentenpunkt sonst auch jede beliebige Lage haben kann.

Betrachten wir z. B. den an einem Ende eingespannten Träger in Figur 64, sehen aber vom Eigengewicht G desselben ab, so hat für eine Stelle $m\,n$ im Abstande x von A das Moment der Kraft P den Wert

$$M_x = P \cdot x.$$

Dieses statische Moment von P wächst also mit x und wird, wenn wir nur den aus dem Mauerwerk hervorragenden Teil $B\,A$ des Trägers ins Auge fassen, am grössten an der Einspannungsstelle für $x = a$ nämlich

$$M_a = P \cdot a.$$

Durch Division dieser beiden Beziehungen erhält man

$$\frac{M_x}{M_a} = \frac{x}{a} \text{ oder } M_x : M_a = x : a,$$

also den Satz: Die Momente in einem eingespannten, am freien Ende belasteten Träger verhalten sich wie die Entfernungen von der Belastungsstelle.

§ 74.

Übungsbeispiele.

213. Auf eine Eisenbahnschiene, welche in ihren Endpunkten A und B unterstützt ist, wirkt ausser dem Eigengewicht von *150 kg*,

welches im Halbierungspunkte C der Schiene angreift, noch eine Last von *600 kg* in D. Man berechne die Drücke X und Y, welche in den Auflagerpunkten A und B stattfinden unter der Bedingung, dass $A\,B = 4\,m$ und $A\,D = 1\,m$ ist.

Resultate: $X = 525\,kg$, $Y = 225\,kg$.

214. Ein eiserner Träger von *300 kg* Gewicht und *6,1 m* Länge ist an jedem von beiden Enden auf *5 cm* Länge gelagert und trägt zwei Lasten von *1000 kg* und *700 kg*, deren Angriffspunkte vom linken Endpunkte *85 cm* und *125 cm* entfernt sind. Welches sind die Reaktionen X und Y, welche in den Mitten der Auflagerflächen wirken?

Antwort: $X = 1576^2/_3$ und $Y = 423^1/_3\,kg$.

215. Wie gestalten sich aber die Resultate der vorigen Aufgabe, wenn der Träger in seiner ganzen Länge noch mit *30 kg* pro laufenden Meter belastet ist?

Antwort: $X = 1668^1/_6\,kg$, $Y = 514^5/_6\,kg$.



Fig. 65.

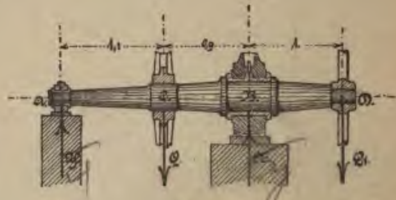


Fig. 66.

216. Eine an ihren Enden gelagerte cylindrische Welle (Fig. 65) von *200 kg* Gewicht misst von Mitte zu Mitte der Lagerung *125 cm*. Sie ist beansprucht durch vier Kräfte von *2000, 625, 750* und *1200 kg*, deren Angriffspunkte von der linken Lagermitte um *25, 40, 50* und *80 cm* abstehen. Man soll die beiden Drücke in den Zapfenlagern bestimmen.

Resultate: $X = 3007\,kg$, $Y = 1768\,kg$.

217. Eine Radachse (Fig. 66) ist in A und B gelagert, dagegen in C und D durch $Q = 800\,kg$ und $Q_1 = 450\,kg$ belastet. Man ermittele die Reaktionen Y und X in A und B, wenn $A\,C = 1{,}1\,m$, $C\,B = 0{,}9\,m$ und $B\,D = 1\,m$ gegeben sind.

Resultate: $X = 135\,kg$ und $Y = 1115\,kg$.

218. Die vorige Aufgabe wurde unter Vernachlässigung des Eigengewichtes der Achse gelöst. Was erhält man aber für X und Y unter Berücksichtigung des Achsengewichtes $G = 120\ kg$, wenn dasselbe in einem Abstande $BE = 0{,}75\ m$ links von B wirkt?

Antwort: $X = 180\ kg$ und $Y = 1190\ kg$.

219. Man löse die Aufgabe 217 unter der allgemeinen Annahme, dass $AC = a$, $CB = b$ und $BD = c$ sei.

Lösung: $X = \frac{bQ - cQ'}{a + b}$, $Y = \frac{aQ + (a + b + c)Q'}{a + b}$.

220. Das freie Ende BA des in Figur 64 veranschaulichten Trägers sei $a = 5\ m$ lang und die in A wirksame Last P betrage $650\ kg$. Wie gross ist das statische Moment der letzteren in den Entfernungen $1, 2, 3, 4\ m$ von A und wie gross an der Einspannungsstelle, wenn das Eigengewicht des Trägers vernachlässigt wird?

Resultate: *650, 1300, 1950, 2600* und *3250* Kilogrammmeter.

221. Man ermittele die Momente für dieselben Punkte, aber unter Berücksichtigung des Trägergewichtes vom je frei bleibenden Ende, welches pro laufenden Meter $30\ kg$ betragen soll.

Resultate: *665, 1360, 2085, 2840* und *3625* Kilogrammmeter.

§ 75.

Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen.

Wir haben in den vorstehenden Paragraphen die Wirkungen kennen gelernt, welche ein ebenes System von Kräften auf einen festen Körper ausüben kann und insbesondere für verschiedene Fälle die Bedingungen des Gleichgewichts festgestellt. Es wurde bisher gefunden, dass sich beliebig viele in der nämlichen Ebene liegende Kräfte mit fest verbundenen Angriffspunkten das Gleichgewicht halten,

erstens, wenn sie in einer Geraden wirken und ihre algebraische Summe gleich Null,

zweitens, wenn sie denselben Punkt angreifen und der Kräftezug ein geschlossenes Polygon (§ 53) oder wenn sowohl die

Summe aller Horizontal-, wie auch die Summe aller Vertikalkomponenten gleich Null (§ 59) und

drittens, wenn sie in irgend welchen Richtungen einen um einen Punkt O der genannten Ebene drehbaren Körper angreifen und zugleich die algebraische Summe der auf den Punkt O bezogenen statischen Momente gleich Null ist (§§ 71 und 72).

Hier entsteht ganz von selbst die Frage nach denjenigen Bedingungen, unter welchen eine beliebige Anzahl von Kräften in derselben Ebene, welche einen frei beweglichen festen Körper beeinflussen, im Gleichgewicht steht.

Diese Frage beantwortet sich zunächst dahin, dass für den Fall des Gleichgewichts die Kräfte dem Körper weder eine fortschreitende noch eine drehende Bewegung erteilen dürfen und da erstens keine fortschreitende Bewegung eintritt, wenn die Gesamtresultante $R = 0$ oder nach § 59 sowohl die Summe aller Horizontal- als auch die Summe aller Vertikalkomponenten gleich Null ist und weil zweitens die drehende Bewegung aufgehoben wird, sobald die Summe der Momente aller wirksamen Kräfte in Bezug auf einen nach Gutdünken gewählten Punkt gleich Null ist, so sind zur Sicherung des Gleichgewichts eines freien ebenen Systems von beliebig vielen Kräften folgende drei gleichzeitigen Bedingungen erforderlich; es muss nämlich

1) die Summe aller Horizontalkomponenten,
2) „ „ „ Vertikalkomponenten und
3) „ „ der statischen Momente aller Kräfte in Bezug auf einen in der Kräfteebene irgendwo gelegenen Punkt gleich Null sein.

Die vorstehenden Bedingungen können dazu dienen, um diejenigen unbekannten Kräfte zu berechnen, welche einen im Gleichgewicht befindlichen Körper beeinflussen, sobald diese Kräfte in der nämlichen Ebene wirken. Sollten mehr als drei unbekannte Kräfte vorhanden sein, so müssen sich, falls die Aufgabe überhaupt bestimmt ist, noch entsprechend weitere Gleichungen aus der Beschaffenheit des speziellen Falles aufstellen lassen. Das Nähere wird aus den folgenden Beispielen hervorgehen.

§ 76.

Anwendungen der drei Gleichgewichtsbedingungen in der Ebene.

Erstens. Ein prismatischer Stab AB (Fig. 67), dessen Gewicht G in seinem Mittelpunkt M angreift, lehnt so gegen eine Vertikal- und eine Horizontalwand, dass die durch seine Achse gehende Vertikalebene rechtwinklig zu beiden, sowie ausserdem $CA = b$ und $CB = h$ ist. Welche Reaktionen (Gegenwirkungen) ruft G hervor, wenn der Stab in A am Ausgleiten verhindert ist und die Reibung unberücksichtigt bleibt?

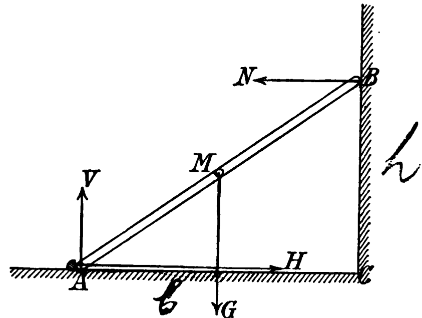


Fig. 67.

Lösung: In A wird ein Horizontalschub H und ein Vertikaldruck V erzeugt, welche nach dem zweiten Axiom die in der Figur gezeichneten gleich grossen Gegenkräfte zur Folge haben und in B entsteht ein Normaldruck mit der gleichen Gegenwirkung N; es müssen sich also die vier Kräfte G, H, V und N das Gleichgewicht halten, wovon die drei letzten unbekannt sind und berechnet werden sollen. Hierzu haben wir die drei Bedingungen

algebr. Summe der Horizontalkräfte $H - N = 0$ · · · · · · (I.)

" " " Vertikalkräfte $G - V = 0$ · · · · · · (II.)

" " " stat. Momente (in Bz. auf A) $G \cdot \frac{b}{2} - Nh = 0$ · (III.)

Aus II folgt

$$V = G,$$

der Vertikaldruck in A ist gleich dem Gewichte des Stabes. Aus (I.) ergiebt sich $H = N$ und aus (III.) $N = \frac{b}{h} \cdot \frac{G}{2}$, wir finden demnach

$$H = N = \frac{b}{h} \cdot \frac{G}{2}.$$

Zweitens. Wie ändern sich die Resultate der vorigen Aufgabe, wenn am Stabe AB in dem durch $AB_1 = b_1$ (Fig. 68) bestimmten Punkte A_1 noch die Last Q hängt?

Lösung: Mit Beibehaltung der obigen Bezeichnungen gehen die drei Gleichgewichtsbedingungen über in

$$H - N = 0,$$
$$Q + G - V = 0,$$
$$G \cdot \frac{b}{2} + Q b_1 - N h = 0,$$

woraus man

$$V = Q + G$$

und

$$N = H = \frac{G b + 2 Q b_1}{2 h}$$

erhält.

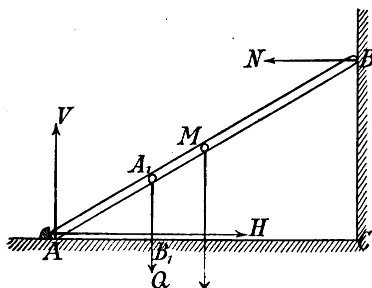


Fig. 68.

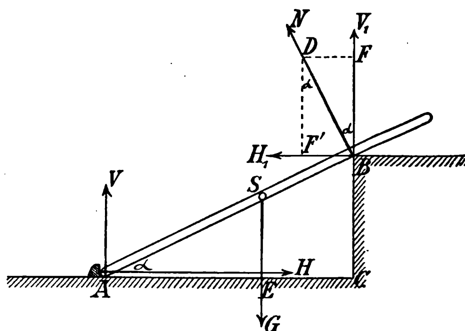


Fig. 69.

Drittens. Wie aus Figur 69 ersichtlich, legt sich ein Stab über die wagrechte Mauerkante B, mit welcher er einen rechten Winkel bilden soll. Das untere Ende findet auf der Horizontalebene CA in A ein genügendes Hindernis gegen das Ausgleiten und das Eigengewicht G des Stabes greift in S an. Man bestimme, wiederum unter Vernachlässigung aller Reibungswiderstände, Horizontalschub H und Vertikaldruck V in A, sowie den Normaldruck N in B, wenn $AC = b$, $CB = h$ und $AE = a$ gegeben sind.

Lösung: Hier müssen wir zunächst den Normaldruck $BD = N$, welchen der Stab von der Mauerkante B zurück-

empfängt, horizontal und vertikal in die Komponenten $BF' = H_1$ und $BF = V_1$ zerlegen. Wir haben dann die drei Bedingungsgleichungen

$$H - H_1 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I.)$$

$$G - V - V_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II.)$$

und, wenn B zum Momentenpunkt gewählt wird,

$$Vb - G(b - a) - Hh = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (III.)$$

allerdings vorläufig mit vier Unbekannten H, H_1, V und V_1. Nun ist aber Dreieck BDF ähnlich ABC, mithin $V_1 : H_1 = b : h$ oder

$$V_1 = \frac{b}{h} H_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (IV.)$$

und folglich, weil nach (I.)

$$H = H_1$$

ist,

$$V_1 = \frac{b}{h} H.$$

Hierdurch geht (II.) über in $G - V - \frac{b}{h} H = 0$ oder

$$V = G - \frac{b}{h} H$$

und wir erhalten mit Einsetzung dieses Wertes in (III.)

$$Gb - \frac{b^2}{h} \cdot H - Gb + Ga - Hh = 0$$

woraus folgt

$$H = \frac{ah}{b^2 + h^2} \cdot G,$$

oder, wenn $AB = l$ eingeführt und nach dem Pythagoras $b^2 + h^2 = l^2$ gesetzt wird,

$$\boldsymbol{H = \frac{ah}{l^2} \cdot G.}$$

Jetzt ergiebt sich mit Benutzung dieses Wertes

$$V = G - \frac{b}{h} H = G - \frac{ab}{l^2} \cdot G = G\left(1 - \frac{ab}{l^2}\right)$$

oder

$$\boldsymbol{V = \frac{l^2 - ab}{l^2} \cdot G}$$

und dann weiter

$$H_1 = H = \frac{a\,h}{l^2} \cdot G,$$

sowie

$$V_1 = \frac{b}{h} \cdot H = \frac{a\,b}{l^2} \cdot G.$$

Schliesslich bekommen wir durch Zusammensetzung der vorstehenden beiden Kräfte den Normaldruck

$$N = \sqrt{H_1^2 + V_1^2} = \sqrt{\frac{a^2 h^2}{l^4} \cdot G^2 + \frac{a^2 b^2}{l^4} \cdot G^2} = \frac{a\,G}{l^2} \cdot \sqrt{h^2 + b^2}$$

und das ist wegen $h^2 + b^2 = l^2$

$$N = \frac{a}{l} \cdot G.$$

Hätten wir übrigens nicht auch die anderen Reaktionen zu bestimmen gehabt, so konnten wir N auf wesentlich kürzerem Wege erhalten; denn in Bezug auf den Punkt A gilt die Momentengleichung $l\,N - a\,G = o$, woraus unmittelbar der letzte Wert von N folgt. Es bestätigt dies zugleich die Richtigkeit der anderen Resultate.

Viertens. Die Last Q in dem durch Fig. 38 in § 56 dargestellten Eisenbahnkran ruft drei Gegenwirkungen hervor, nämlich im Zapfenlager bei C den Druck V vertikal von unten nach oben, sowie den Druck H horizontal von links nach rechts und an der Leitrolle B den Horizontaldruck H' von rechts nach links. Setzen wir wieder $C\,E = h$ und $D\,E = a$, so können wir diese Reaktionen nunmehr etwas bequemer durch die drei Gleichgewichtsbedingungen:

Summe aller Vertikalkräfte $Q - V = 0$

„ „ Horizontalkräfte $H - H_1 = 0$

und

Summe der auf den Punkt C bezogenen Momente $Q\,a - H_1\,h = 0$

ermitteln; denn aus der ersten Gleichung folgt

$$V = Q$$

und aus den beiden letzten

$$H = H_1 = \frac{a}{h} \cdot Q,$$

wie früher. Auch bildet jetzt die Berücksichtigung des Krangewichtes G keine Erschwerung der Aufgabe; denn bezeichnen wir noch den Abstand zwischen der Richtung von G und der Drehachse des Kranes mit b, so gehen die obigen drei allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen über in

$$Q + G - V = 0,$$
$$H - H_1 = 0$$

und

$$Qa + Gb - H_1 h = 0$$

und hieraus erhalten wir die Formeln

$$V = Q + G$$

und

$$H = H_1 = \frac{Qa + Gb}{h},$$

welche angeben, in wie weit das Eigengewicht G des Krans die Drücke V, H und H_1 verstärkt.

§ 77.

Die statischen Momente von Parallelkräften in Bezug auf eine Achse.

Die parallelen Kräfte in der Ebene kann man entweder, wie bisher auf einen Punkt oder aber zweitens auch auf eine Achse in der nämlichen Ebene beziehen. Dann versteht man unter dem statischen Momente jeder Kraft das Produkt aus der letzteren und dem von ihrem Angriffspunkt auf die Momentenachse gefällten Lote, welches auch hier der Hebelsarm der Kraft genannt wird. Unter Voraussetzung dieser Definition und mit der Bestimmung, dass die Momente der Kräfte positiv oder negativ gesetzt werden, je nachdem sie die um irgend einen ihrer Punkte drehbar gedachte Achse im Sinne des Uhrzeigers oder entgegengesetzt bewegen würden, gilt dann derselbe Satz, wie im § 72, was wir zunächst für zwei Parallelkräfte beweisen wollen.

Es mögen die beiden Parallelkräfte P_1 und P_2 (Fig. 70) an den Endpunkten einer starren Strecke $A_1 A_2$ wirken, so dass also wieder der Angriffspunkt A der Resultante

$$R = P_1 + P_2$$

die Proportion $A A_1 : A A_2 = P_2 : P_1$ erfüllt. Fällen wir jetzt von A_1, A und A_2 die Lote

$$A_1 C_1 = p_1, \; A C = r \text{ und } A_2 C_2 = p_2$$

auf die zur Momentenachse gewählten Geraden $X X'$ und ziehen $A_1 D$ und $A D_2$ parallel $X X'$, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $A_1 D A$ und $A D_2 A_2$ die Proportion

$$A D : A_2 D_2 = A A_1 : A A_2,$$

oder weil

$$A D = A C - A_1 C_1 = r - p_1$$

und

$$A_2 D_2 = A_2 C_2 - A C = p_2 - r$$

ist, mit Benützung der obigen Proportion $A A_1 : A A_2 = P_2 : P_1$

$$(r - p_1) : (p_2 - r) = P_2 : P_1,$$
$$P_1 r - P_1 p_1 = P_2 p_2 - P_2 r,$$
$$(P_1 + P_2) r = P_1 p_1 + P_2 p_2,$$

$$\boldsymbol{R r = P_1 p_1 + P_2 p_2}$$

was wir zeigen wollten.

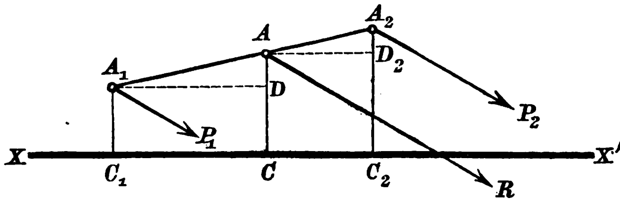


Fig. 70.

Dieses Ergebnis kann genau so wie in § 72 ausgedehnt werden auf die n Parallelkräfte

$$P_1, P_2, P_3, \cdots P_n,$$

deren Angriffspunkte $A_1, A_2, A_3, \cdots A_n$ von einer in der Ebene beliebig angenommenen Momentenachse $X X'$ die Abstände

$$p_1, p_2, p_3, \cdots p_n$$

besitzen. Wir bekommen dieselben Gleichungen wie dort und schliesslich auch dasselbe Resultat

$$R r = P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + \cdots + P_n p_n,$$

also den Satz: Auch in Bezug auf jede Achse ist das Moment der Resultante eines ebenen Systems von Parallelkräften gleich der algebraischen Summe der Momente aller Einzelkräfte.

Mit Hilfe dieses Lehrsatzes kann aber für ein System von Parallelkräften in der Ebene, deren Angriffspunkte in unveränderlicher Verbindung stehen, nicht allein die Resultante selbst, sondern auch die Lage ihres Angriffspunktes ermittelt werden. Zu diesem Behufe nimmt man nacheinander zwei verschiedene Achsen an, welche am zweckmässigsten zu einander senkrecht gewählt werden und wendet nun auf jede derselben den obigen Momentensatz an. Hierdurch erhält man die Abstände des Angriffspunktes der Resultante von den beiden Achsen und ist folglich über die Lage desselben im Klaren.

Anwendungsbeispiel. In den vier Ecken, den Seitenmitten und dem Durchschnittspunkt der Diagonalen eines Rechteckes mit der Basis $A_1 A_7 = 1{,}8\,m$ und der Höhe $A_1 A_3 = 1{,}2\,m$ wirken die neun Parallelkräfte $P_1 = 5\,kg$, $P_2 = 10\,kg$, $P_3 = 15\,kg$, $P_4 = 20\,kg$, $P_5 = 25\,kg$, $P_6 = 30\,kg$, $P_7 = 35\,kg$, $P_8 = 50\,kg$ und $P_9 = 60\,kg$ in der aus Fig. 71 ersichtlichen Anordnung. Man soll den Angriffspunkt M der Resultante bestimmen, indem man seine Abstände x und y von $A_1 A_3$ und $A_1 A_7$ angiebt.

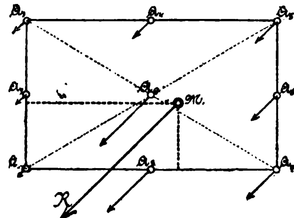


Fig. 71.

Lösung. Da $R = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_9 = 250\,kg$ ist, so besteht in Bezug auf $A_1 A_3$ als Momentenachse die Gleichung

$$250\,x = (5 + 10 + 15) \cdot 0 + (20 + 60 + 50)\,0{,}9 + (25 + 30 + 35)\,1{,}8$$

oder

$$250\,x = 117 + 162 = 279,$$

woraus folgt

$$\boldsymbol{x = 1{,}116\,m.}$$

Zur Bestimmung von $MB = y$ nehmen wir $A_1 A_7$ als Momentenachse an und erhalten aus

$$250\,y = (5 + 50 + 35) \cdot 0 + (10 + 60 + 30) \cdot 0{,}6 + (15 + 20 + 25) \cdot 1{,}2,$$

$$250\,y = 60 + 72 = 132,$$

$$\boldsymbol{y = 0{,}528\,m.}$$

§ 78.

Übungsbeispiele.

222. In den vier Eckpunkten A_1, A_2, A_3 und A_4 eines Quadrates, dessen Seite $a = 500$ Millimeter lang ist, greifen vier parallele Kräfte von *33*, *11*, *44* und *12* Kilogramm an. Man soll den Angriffspunkt der Resultante bestimmen, indem man seine Abstände x und y von den Quadratseiten $A_1 A_2$ und $A_1 A_4$ angiebt.

Lösung: $x = 280$ und $y = 275\ mm$.

223. Man bestimme den Mittelpunkt dreier paralleler Kräfte $P_1 = 80\ kg$, $P_2 = 60\ kg$ und $P_3 = 110\ kg$, welche die Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $A_1 A_3 = 30$ und $A_2 A_3 = 40$ Centimeter angreifen.

Lösung: Der Kräftemittelpunkt ist von beiden Katheten *96* Millimeter entfernt.

224. Drei beliebige parallele Kräfte P_1, P_2 und P_3 wirken in den Eckpunkten A_1, A_2 und A_3 eines gleichseitigen Dreiecks von der Seite a. Welches sind die Abstände x, y und z des Kräftemittelpunktes A von den drei Seiten $A_2 A_3$, $A_3 A_1$ und $A_1 A_2$?

Antwort: $x = \frac{a P_1 \sqrt{3}}{2 R}$, $y = \frac{a P_2 \sqrt{3}}{2 R}$ und $z = \frac{a P_3 \sqrt{3}}{2 R}$, worin $R = P_1 + P_2 + P_3$.

225. Wohin fällt aber A, wenn spezieller Weise die drei Kräfte einander gleich sind?

Antwort: In den Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks.

226. In den Eckpunkten, den Seitenmittelpunkten und dem Durchschnittspunkte der Diagonalen eines Rechtecks (Fig. 71), dessen Seiten *90* und *120* Centimeter betragen, wirken in fortlaufender Reihenfolge die neun parallelen Kräfte von *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8* und *9* Kilogramm. Es sollen die Abstände x und y des Kräftemittelpunktes von der ersten und letzten Rechteckseite berechnet werden.

Resultat: $x = 76\ cm$, $y = 41\ cm$.

§ 79.

Der Mittelpunkt paralleler Kräfte.

Weil der Angriffspunkt der Resultierenden unabhängig von der Richtung der einzelnen Kräfte ist und demnach auch seine Lage beibehält, wenn sich alle unter sich parallel bleibende Kräfte um ihre Angriffspunkte herumdrehen, so heisst der erstgenannte Punkt auch der Mittelpunkt der parallelen Kräfte.

Setzen wir nun, wie es in der Folge zutrifft, voraus, dass sämtliche Kräfte nach derselben Seite wirken, so kann die Resultante nicht Null sein, weil sie sich dann als Summe von lauter positiven Gliedern darstellt. Dagegen ist es sehr wohl möglich, dass die Summe der statischen Momente aller Kräfte gleich Null ist, sobald die Angriffspunkte der letzteren auf verschiedenen Seiten der Achse liegen, insofern dann die Kraftmomente teils positiv, teils negativ ausfallen. In diesem Falle muss aber nach Formel 4 des vorigen Paragraphen $Rr = 0$ und folglich, da R grösser als Null, $r = 0$ sein, d. h. der Kräftemittelpunkt muss in der Momentenachse liegen. Dies giebt den Satz: Wenn die Summe der statischen Momente eines ebenen Systems von nach derselben Seite wirkenden Parallelkräften in Bezug auf eine Achse gleich Null ist, so liegt der Kräftemittelpunkt in dieser Achse, welcher von grundlegender Bedeutung für die Schwerpunktslehre ist.

Siebentes Kapitel.

Einführung in die Lehre vom Schwerpunkt.

§ 80.

Allgemeines.

Eine überaus wichtige Anwendung von der Zusammensetzung paralleler Kräfte haben wir in der Schwerpunktslehre.

Denkt man sich nämlich einen festen Körper aus zahllosen und folglich verschwindend kleinen Teilchen — materiellen Punkten — zusammengesetzt, so wirkt auf jedes dieser Teilchen eine Kraft, welche nahe am Erdmittelpunkte ihren Sitz hat und Anziehungskraft der Erde oder Schwerkraft genannt wird.

Bei der im Verhältnis zu den Dimensionen eines irdischen Körpers ungeheuren Entfernung des Erdcentrums können alle diese Kräfte als vollkommen parallel angesehen werden, und es wirkt daher auf jeden starren Körper ein System unendlich vieler paralleler Kräfte, deren Angriffspunkte untereinander fest verbunden sind und welche sich mithin zu einer Resultante zusammensetzen. Weil die Grösse der letzteren das Gewicht und ihr Angriffspunkt der Schwerpunkt des Körpers heisst, so kann man den Schwerpunkt eines Körpers definieren als denjenigen Punkt, in welchem das Eigengewicht eines Körpers angreift oder auch als den Mittelpunkt aller parallelen Kräfte, welche vom Erdmittelpunkte aus auf die einzelnen materiellen Punkte eines Körpers wirksam sind.

In der Schwerpunktslehre teilt man alle Gebilde ein in Linien, Flächen und Körper, und versteht darunter mathematische Linien, Flächen und Körper, über welchen aber irgend eine Materie ausgebreitet ist, resp. welche von solcher erfüllt sind. Gewissermassen als Modell einer materiellen Linie könnte ein sehr schwacher unbiegsamer Metalldraht und als materielle Fläche etwa ein dünnes starres Metallblech gelten.

Speziell nennt man nun wieder diejenigen materiellen Linien, Flächen und Körper homogen (gleichartig), von welchen gleiche (Längen-, bzw. Flächen-, bzw. Volumen-) Teilchen an allen möglichen Stellen des Gebildes gleich viel wiegen. So wird beispielsweise ein Metalldraht homogen genannt werden dürfen, wenn er überall gleichen Querschnitt besitzt; denn zerschneidet man ihn in lauter millimeterlange oder noch kürzere Stückchen gleicher Länge, so wiegt eines genau so viel wie alle anderen. Wenn man ferner einen homogenen Körper in noch so kleine aber gleiche Teilchen zerlegt, so müssen alle dasselbe Gewicht besitzen. Dagegen nennt man heterogen (verschiedenartig) ein Gebilde, dessen einzelne gleich grosse Teile ihrem Gewichte nach verschieden sind, z. B. ein als Ganzes aufgefasstes Gebäude oder ein aus verschiedenen Metallen gefertigter Gegenstand, ja selbst ein an den einzelnen Stellen ungleich stark gehämmertes Stück Eisen müsste streng genommen als heterogen betrachtet werden.

In den folgenden Schwerpunktsbestimmungen sollen jedoch lediglich homogene Linien, Flächen und Körper vorausgesetzt werden.

Schliesslich ist noch nötig zu wissen, dass eine Ebene, welche durch den Schwerpunkt eines Gebildes hindurchgeht, Schwerebene und analog eine Gerade, die den Schwerpunkt enthält, Schwerlinie oder Schwerachse jenes Gebildes genannt wird.

§ 81.

Fundamentalsatz.

Es sei vorausgeschickt, dass man unter der Symmetrieachse einer ebenen Figur eine durch letztere hindurchgelegte Gerade von folgender Eigenschaft versteht: Fällt man von irgend einem Punkte der Begrenzungslinie ein Lot auf die Gerade und verlängert es nach der anderen Seite um sich selbst, so trifft man stets wieder auf einen Begrenzungspunkt der Figur. Z. B. ist für ein gleichschenkliges Dreieck die Höhe, für einen Kreis jeder Durchmesser Symmetrieachse.

Hieraus kann zwar gefolgert werden, dass eine Symmetrieachse jede ebene Figur in zwei kongruente Teile zerlegt, aber nicht umgekehrt muss diejenige Gerade, welche ein Gebilde in kongruente Teile zerlegt, notwendig auch eine Symmetrieachse sein. Z. B. teilt die Diagonale eines ungleichseitigen Parallelogrammes letzteres wohl in zwei kongruente Dreiecke und ist dennoch keine Symmetrieachse.

Denkt man sich jetzt eine ebene symmetrische und homogene Fläche in zahllose gleiche Teilchen zerlegt und nimmt die Symmetrieachse als Momentenachse an, so entspricht jedem Teilchen auf der einen Seite der letzteren ein solches auf der anderen, welches mit jenem gleichen Abstand von der Achse und demnach auch gleiches statisches Moment hat. Da aber die Momente zweier derartiger einander gegenüberliegenden Massenteilchen mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen werden müssen, so ist die Summe der Momente aller Kräfte, welche vom Erdmittelpunkte aus auf das homogene Flächengebilde wirken, in Bezug auf die Symmetrieachse gleich Null und mithin liegt nach dem letzten

Satze des § 79 der Mittelpunkt jener als parallel anzusehenden Kräfte — und das ist der Schwerpunkt der symmetrischen ebenen Figur — in der Symmetrieachse.

Da die gleiche Betrachtung auch für ein symmetrisches Liniengebilde angestellt werden kann, so gelangen wir zu dem Ergebnis: Jede Symmetrieachse irgend eines homogenen Flächen- oder Liniengebildes ist gleichzeitig eine Schwerachse.

§ 82.

Schwerpunkte geradliniger Gebilde.

Aus der letzteren Regel folgt unmittelbar, dass der Schwerpunkt S einer homogenen Strecke AB (Fig. 72) in den Mittelpunkt der letzteren fällt; denn erstens muss doch S in der Strecke selbst liegen und zweitens ist die im Mittelpunkte von AB errichtete Senkrechte MN eine Symmetrieachse für AB, enthält folglich ebenfalls den Schwerpunkt.

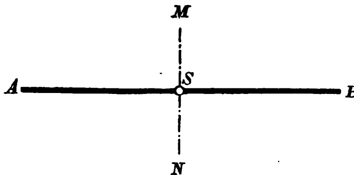


Fig. 72.

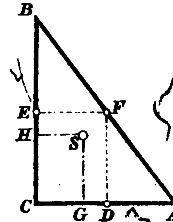


Fig. 73.

Mit Hilfe dieses und des Momentensatzes können die Schwerpunkte aller ebenen Liniengebilde durch Rechnung gefunden werden, indem man eine Achse passend wählt und in Bezug auf dieselbe das statische Moment der Resultante gleich der Summe der Momente aller parallelen Komponenten, das ist hier: das Moment vom Gewichte des Ganzen gleich der Summe der Momente von den Gewichten seiner einzelnen Teile setzt.

Hierbei ist es auch erlaubt, statt der Gewichte die Längen der vorkommenden Linien in Rechnung zu bringen; denn besteht ein Liniengebilde von der Gesamtlänge L aus n Teilen mit den Längen $l_1, l_2, l_3, \cdots l_n$, sodass

$$L = l_1 + l_2 + l_3 + \cdots + l_n,$$

bezeichnen wir ferner den Abstand des Gesamtschwerpunktes von einer bestimmten Achse mit x, die Schwerpunktsabstände der einzelnen Teile von derselben Achse mit $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$ und das Gewicht der Längeneinheit mit γ, so gilt nach § 77 die Gleichung

$$L \gamma x = l_1 \gamma x_1 + l_2 \gamma x_2 + l_3 \gamma x_3 + \cdots + l_n \gamma x_n$$

und hieraus folgt nach Division durch γ

$$L x = l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 + \cdots + l_n x_n.$$

Weil ein Punkt in der Ebene durch seine Abstände von zwei gegebenen Geraden bestimmt ist, so hat man für ebene Gebilde das vorstehend erläuterte Verfahren im allgemeinen zweimal anzuwenden.

Es sei z. B. die Lage des Schwerpunktes S, vom Umfange eines rechtwinkligen Dreiecks (Figur 73) mit den Katheten $CA = 3\ cm$ und $CB = 4\ cm$ ausfindig zu machen.

Lösung. Nach dem Lehrsatz des Pythagoras ist die Hypotenuse

$$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5\ cm,$$

folglich beträgt der Dreiecksumfang $3 + 4 + 5 = 12\ cm$, und es gilt, wenn wir $SH = x$ setzen, in Rücksicht auf BC die Momentengleichung

$$12\,x = 3 \cdot \frac{3}{2} + 4 \cdot 0 + 5 \cdot \frac{3}{2} = 12,$$

woraus folgt

$$\boldsymbol{x = 1\ cm},$$

der Abstand des Schwerpunktes S von BC. Wählen wir zweitens CA zur Momentenachse und bezeichnen das Lot SG mit y, so besteht die Beziehung

$$12\,y = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 18$$

und wir erhalten daraus

$$\boldsymbol{y = 1{,}5\ cm},$$

den Abstand des Schwerpunktes S von der Kathete CA.

Dagegen reicht bei symmetrischen ebenen Gebilden zur Ermittelung des Schwerpunktes ein einziger Abstand und demgemäss auch lediglich eine Momentengleichung aus, da ja ersterer in der Symmetrieachse liegt.

So ist z. B. die Linienfigur 74, welche aus dem Umfange eines gleichseitigen Dreiecks und dessen Höhe AD bestehen soll, symmetrisch zu AD; mithin liegt der Schwerpunkt S in AD und wir brauchen zu seiner Bestimmung nur die Entfernung $SD = x$.

Setzen wir jetzt $AB = BC = CA = a$, so ist die Höhe

$$AD = h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3},$$

folglich sind die Schwerpunkte E, F und H der Strecken AC, AB und AD von BC um

$$\frac{h}{2} = \frac{a}{4} \cdot \sqrt{3}$$

Fig. 74.

entfernt und wir erhalten aus der Gleichung der auf die Basis BC bezogenen Momente

$$\left(3a + \frac{a}{2}\sqrt{3}\right)x = a \cdot 0 + a \cdot \frac{a}{4}\sqrt{3} + a \cdot \frac{a}{4}\sqrt{3} + \frac{a}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{a}{4}\sqrt{3}$$

nach Multiplikation mit 8 und Division durch a

$$4(6 + \sqrt{3})x = 4a\sqrt{3} + 3a = (3 + 4\sqrt{3})a$$

oder

$$x = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{6 + \sqrt{3}} \cdot \frac{a}{4} = \sim \mathbf{0{,}321\ a},$$

die Entfernung des Schwerpunktes von der Grundlinie BC.

§ 83.

Übungsbeispiele.

227. Welches sind die beiden Schwerpunktsabstände $SH = x$ und $SG = y$ in Fig. 73, wenn die Katheten CA, CB allgemein mit a, b bezeichnet werden.

Antwort: $x = \dfrac{b(b + c)}{2(a + b + c)}$ und $y = \dfrac{a(a + c)}{2(a + b + c)}$, worin $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

228. Wo liegt der Schwerpunkt eines rechten Winkels mit den Schenkeln a und b?

Antwort: Er hat von b und a die Abstände

$$x = \frac{a}{a + b} \cdot \frac{a}{2} \text{ und } y = \frac{b}{a + b} \cdot \frac{b}{2}.$$

229. In dem zu AB symmetrischen Liniengebilde der **Figur** 75 sei $AB = a$, $CD = b$ und $EF = c$; man berechne den Schwerpunktsabstand $AS = x$.

Resultat: $x = \frac{a + 2c}{a + b + c} \cdot \frac{a}{2}$.

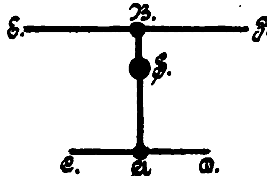


Fig. 75.

230. Die für AB symmetrische Figur 76 besteht aus den Strecken $AB = a$, $CE = DF = b$ und $CD = c$; man berechne den Schwerpunktsabstand $AS = x$.

Resultat: $x = \frac{a^2 + 2b^2}{2(a + 2b + c)}$.

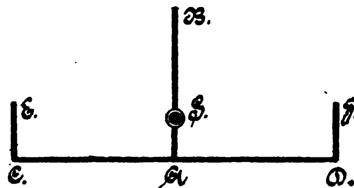


Fig. 76.

231. Was erhält man aus der letzten Formel für die Zahlenwerte $a = 2\,cm$, $b = 1\,cm$ und $c = 6\,cm$?

Antwort: $x = 3\,mm$.

232. Welcher Wert ergiebt sich aber für $c = b = a$?

Antwort: $x = \frac{3}{8}a$.

233. Ein Gebilde ist zusammengesetzt aus einer Strecke $CD = 6a$, eines in deren Mittelpunkte A errichteten Lotes

$A\,B = 4\,a$ und den Verbindungsgeraden $B\,C$ und $B\,D$. Wie weit ist der Schwerpunkt von A entfernt?

Antwort: Um $x = 1{,}4\,a$.

234. Wie gross wird der Schwerpunktsabstand $A\,S = x$ in Figur 75, wenn erstens $c = 0$ und zweitens $c = b$ ist?

Antwort: $x = \frac{a^2}{2\,(a + b)}$, bzw. $x = \frac{a}{2}$.

§ 84.

Schwerpunkt des Kreisbogens.

Wie schon aus dem bisherigen klar hervortritt, giebt es zwei Grundmittel, mit Hilfe welcher der Schwerpunkt eines homogenen ebenen Gebildes gefunden werden kann, nämlich erstens die Feststellung etwaiger Symmetrieebenen, resp. Symmetrieachsen, und, wenn die letzteren gar nicht oder doch nicht in genügender Anzahl

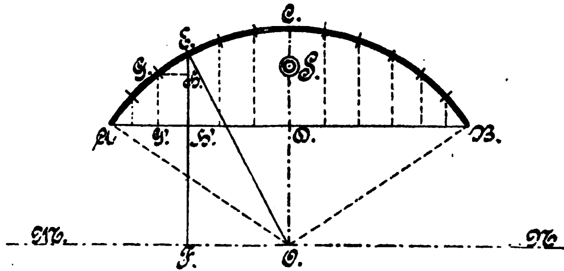


Fig. 77.

vorhanden sein sollten, die Zerlegung des Gebildes in einzelne Bestandteile, deren Schwerpunkte man bereits kennt.

Was nun irgend einen Kreisbogen $A\,C\,B$ (Fig. 77) anlangt, so ist zwar zunächst derjenige Radius $O\,C = r$, welcher die Sehne $A\,B = s$ und damit zugleich die Länge b des Bogens halbiert, eine Symmetrie- und demnach auch Schwerachse; um aber den Abstand $O\,S = x$ des Schwerpunktes von O zu erhalten, sind wir genötigt, den Bogen $A\,C\,B$ in unendlich viele, am besten gleich lang gedachte Teilchen zu zerlegen. Diese letzteren, welche wir Bogenelemente nennen wollen, sind dann bei ihrer verschwindenden Länge als geradlinig anzusehen, und es kommt jetzt

darauf an, einen mathematischen Hilfssatz zu entwickeln, welcher von jedem solchen Kreisbogenstückchen gilt.

Zu dem Ende greifen wir ein Kreisbogenelement $G E$ an beliebiger Stelle heraus, ziehen durch O eine Parallele $M N$ zu $A B$, ferner $E F$ parallel $C O$, $G H$ parallel $A B$ und verbinden E mit O. Hierdurch entstehen zwei bei F und H rechtwinklige Dreiecke, deren Hypotenusen $E O$, $G E$, sowie deren Katheten $E F$, $G H$ lotrecht zu einander sind, sodass der Proportion

$$O E : E F = E G : G H$$

genügt wird. Setzen wir hierin den Radius $O E = r$, das Bogenelement $E G = e$, die Projektion des letzteren auf die Sehne, das ist $G H = G' H' = p$, sowie seinen Abstand von $M N$, nämlich $E F = y$, so folgt

$$r : y = e : p$$

und hieraus

$$e y = r p.$$

Bezeichnen wir nun alle Elemente des Kreisbogens vom Punkte A bis zum Punkte B fortlaufend mit

$$e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n,$$

ferner ihre bezüglichen Abstände von der Geraden $M N$ mit

$$y_1, y_2, y_3, \cdots y_n,$$

so ist in Bezug auf $M N$ als Momentenachse das statische Moment des ganzen Kreisbogens gleich der Summe der Momente aller seiner Teile, also

$$b x = e_1 y_1 + e_2 y_2 + e_3 y_3 + \cdots + e_n y_n.$$

Jetzt können wir aber diese Summation unendlich vieler Grössen mit Hilfe der oben entwickelten und allgemein giltigen Formel $e y = r p$ wirklich ausführen, denn sind die Projektionen aller Bogenelemente auf die Sehne $A B$ der Reihe nach

$$p_1, p_2, p_3, \cdots p_n,$$

so haben wir

$$e_1 y_1 = r p_1, e_2 y_2 = r p_2, e_3 y_3 = r p_3, \cdots e_n y_n = r p_n,$$

folglich

$$b x = r p_1 + r p_2 + r p_3 + \cdots + r p_n$$
$$= r (p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n)$$

und mithin, weil offenbar

$$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = s$$

ist,

$$b\,x = r\,s$$

oder

$$x = \frac{r\,s}{b} = \frac{\textit{Radius mal Sehne}}{\textit{Bogen}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1.$$

als Schwerpunkts-Abstand eines Kreisbogens vom Mittelpunkte des letzteren. Speziell für $s = 2r$ und $b = r\pi$ entsteht aus 1

$$x = \frac{2r}{\pi} = \sim 0{,}6366\,r, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2.$$

der Schwerpunkts-Abstand des halben Kreisumfanges vom Centrum.

§ 85.

Übungsbeispiele.

235. Es sollen die Schwerpunkts-Abstände von sechs Kreisbögen mit dem gemeinschaftlichen Radius r und den Centriwinkeln 60^0, 90^0, 120^0, 240^0, 270^0, 300^0 angegeben werden.

Resultate: $\frac{3r}{\pi} = 0{,}955\,r$, $\frac{2r\sqrt{2}}{\pi} = 0{,}9\,r$, $\frac{3r\sqrt{3}}{2\pi} = 0{,}827\,r$, $\frac{3r\sqrt{3}}{4\pi} = 0{,}4135\,r$, $\frac{2r\sqrt{2}}{3\pi} = 0{,}3\,r$ und $\frac{3r}{5\pi} = 0{,}191\,r$.

236. Ein homogenes Gebilde besteht aus einem halben Kreisumfang und einem, den letzteren halbierenden Radius. Wie weit ist der Schwerpunkt vom Centrum entfernt?

Antwort: $x = \frac{5}{\pi + 1} \cdot \frac{r}{2} = 0{,}60363\,r.$

237. Wie gestaltet sich aber das Resultat, wenn noch der die Endpunkte der halben Kreisperipherie verbindende Durchmesser hinzukommt?

Antwort: $x = \frac{5}{\pi + 3} \cdot \frac{r}{2} = 0{,}40706\,r,$

238. Um welche Strecke y müsste in Aufgabe 236 der Halbmesser nach der dem Halbkreise entgegengesetzten Seite verlängert werden, damit der Schwerpunkt des Ganzen in das Centrum fällt?

Antwort: Um $y = r\sqrt{5}$.

§ 86.

Schwerpunkte einfacher ebener Flächen.

Um den Schwerpunkt einer Fläche ausfindig zu machen, müssen wir sie in Teile zu zerlegen trachten, von welchen letzteren uns die Schwerpunkte bereits bekannt sind. Wie dies gelingt, werden die folgenden Beispiele zeigen.

Erstens. Wir wünschen die Schwerpunktslage einer homogenen Dreieckfläche (Fig. 78) kennen zu lernen, zerlegen zu dem Ende $AD = h$ in zahllose gleiche Teile und ziehen durch die Teilpunkte

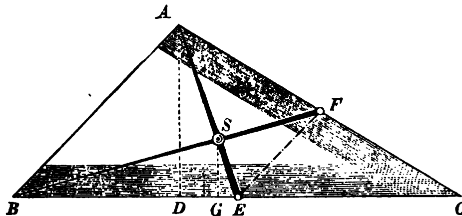


Fig. 78.

Parallele zur Basis $BC = a$. Hierdurch zerfällt die ganze Dreieckfläche in lauter homogene Strecken, deren sämtliche Schwerpunkte auf derjenigen Transversale AE liegen, welche alle halbiert, und mithin ist AE Schwerlinie.*) Aus gleichen Gründen enthält aber

*) Da das Gewicht eines jeden Gebildes im Schwerpunkt angreift, so darf man sich das erstere in den letzteren konzentriert vorstellen, wodurch man statt jenes Gebildes mechanisch genommen einen materiellen Punkt erhält. Die Gewichte der homogenen Strecken, in welche das Dreieck ABC zerlegt wurde, wirken demnach genau so, wie eine gleiche Anzahl materieller Punkte, welche sich auf der Geraden AE in gleichen Abständen aneinander reihen und offenbar eine materielle Linie bilden.

Weil aber die homogenen Strecken von A aus gegen BC zu immer länger und demnach die materiellen Punkte von A nach E hin immer gewichtiger werden, so stellt AE keine homogene, sondern eine heterogene Gerade dar, und es erklärt sich jetzt auch auf diese Weise, warum der Schwerpunkt S des Dreiecks näher an E als an A liegt. Diese Art der Anschauung wird uns später Dienste leisten.

auch die Transversale BF, welche AC halbiert, den Schwerpunkt S des Dreiecks ABC und folglich gilt der Satz:

Der Schwerpunkt einer Dreiecksfläche liegt im Durchschnitt der die Seiten halbierenden Transversalen.

Dieser Schwerpunkt S der Dreiecksfläche hat aber noch eine für später wichtige geometrische Eigenschaft, welche wir in Kürze entwickeln wollen.

Verbinden wir zu dem Ende E mit F, so entsteht das Dreieck CFE, welches dem Dreieck CBA ähnlich ist und mithin gilt die Proportion

$$EF : AB = CE : CB = 1 : 2$$

Zweitens folgt aber aus der Ähnlichkeit genannter Dreiecke, dass $EF \parallel AB$ ist und hieraus wieder die Ähnlichkeit der Dreiecke SEF und SAB, sodass die fernere Proportion

$$SE : SA = EF : AB = 1 : 2$$

besteht. Aus

$$SE : SA = 1 : 2$$

ergiebt sich dann weiter

$$SE : (SE + SA) = 1 : (1 + 2)$$

oder

$$SE : AE = 1 : 3$$

und endlich, wenn wir $SG = x$ senkrecht zur Basis BC ziehen, wegen Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke SGE und ADE,

$$SG : AD = SE : AE = 1 : 3$$

das ist

$$x : h = 1 : 3,$$

also

$$x = \frac{h}{3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1.$$

oder in Worten: Der Schwerpunkt S einer Dreiecksfläche ist von jeder Seite um den dritten Teil der zugehörigen Höhe entfernt.

Zweitens. Der Schwerpunkt eines Parallelogramms ist der Schnittpunkt beider Diagonalen, weil letztere sich gegenseitig halbieren und folglich jede die Schwerpunkte der beiden Dreiecke verbindet, in welche das Parallelogramm durch die andere Diagonale zerlegt wird.

Demnach ist, wenn h die Höhe des Parallelogramms bezeichnet,

$$x = \frac{h}{2} \quad \cdots\cdots\cdots \quad 2.$$

der Abstand des Schwerpunktes von der entsprechenden Grundlinie.

Drittens. Wir wenden uns nun zur Betrachtung einer Trapezfläche $ABCD$ (Fig. 79) mit den parallelen Seiten $AD = a$, $BC = b$ und der Höhe h, erkennen zunächst leicht, dass die Gerade EF, welche die parallelen Seiten halbiert, eine Schwerlinie ist; es kommt also nur noch darauf an, den Abstand $SG = x$ des Schwerpunktes von $AD = a$ zu ermitteln.

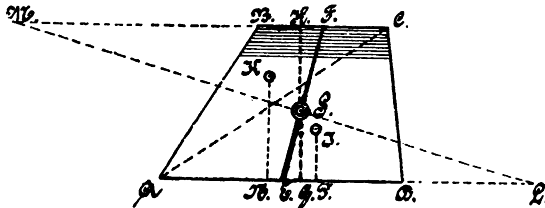


Fig. 79.

Zu diesem Behufe zerlegen wir das Trapez durch die Diagonale AC in zwei Dreiecke und nehmen AD als Momentenachse an, dann ist für das Dreieck ABC der Schwerpunktsabstand $KN = \frac{2}{3}h$, der Flächeninhalt $= \frac{1}{2}bh$, also das Moment $= \frac{1}{3}bh^2$*) und für das Dreieck ACD der Schwerpunktsabstand

*) Dass nämlich bei Anwendung des Momentengesetzes auf homogene Flächen statt der Gewichte auch die Inhalte gesetzt werden dürfen, lässt sich wie folgt zeigen: Eine Fläche F sei aus den n Teilen $f_1, f_2, f_3, \cdots f_n$ zusammengesetzt, so dass

$$F = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n$$

ist. Die bezüglichen Schwerpunktsabstände von einer festen Achse bezeichnen wir mit $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ und das Gewicht der Flächeneinheit mit γ; dann haben wir nach dem Satze der statischen Momente

$$F\gamma x = f_1\gamma x_1 + f_2\gamma x_2 + f_3\gamma x_3 + \cdots + f_n\gamma x_n$$

und erhalten hieraus mittels Division durch γ

$$Fx = f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + \cdots + f_n x_n$$

w. z. b. w.

$JP = \frac{1}{3} h$, der Inhalt $= \frac{1}{2} a h$, demnach das statische Moment $= \frac{1}{6} a h^2$. Weil nun ferner das auf dieselbe Achse AD bezogene Moment des Trapezes $= \frac{a+b}{2} h x$ ist, so gilt die Momentengleichung

$$\frac{a+b}{2} h x = \frac{a h^2}{6} + \frac{b h^2}{3},$$

woraus folgt

$$3(a+b) x = a h + 2 b h = (a + 2 b) h$$

oder

$$x = \frac{a + 2 b}{a + b} \cdot \frac{h}{3}, \quad \ldots\ldots\ldots 3.$$

der Abstand des Schwerpunktes einer Trapezfläche von der Seite a.

Diese Formel lässt folgende ziemlich einfache Konstruktion zu: Verlängert man BC um $BM = a$, AD um $DL = b$ und verbindet L mit M, so wird EF von LM im Schwerpunkte S des Trapezes geschnitten; denn aus der Ähnlichkeit der Dreiecke SEL und SFM folgt die Verhältnisgleichheit der Grundlinien und Höhen

$$EL : SG = FM : SH$$

oder

$$\left(\frac{a}{2} + b\right) : x = \left(a + \frac{b}{2}\right) : (h - x)$$

und hieraus nach kurzer Rechnung

$$x = \frac{a + 2 b}{a + b} \cdot \frac{h}{3},$$

wie es Formel 3 verlangt.

Viertens. Was schliesslich den Schwerpunkt einer Kreissektorfläche anbelangt, so liegt derselbe in demjenigen Halbmesser OC (Fig. 80), welcher den Centriwinkel $AOB = \alpha$ halbiert, weil diese Linie Symmetrieachse ist, es fragt sich also noch, in welchem Abstande $OS = x$ vom Kreismittelpunkte.

Um dies zu erfahren, denken wir uns den Bogen AB in unendlich viele gleiche Teile zerlegt und jeden Teilpunkt mit O verbunden. Hierdurch zerfällt die Sektorfläche in kongruente und daher gleich viel wiegende gleichschenklige Dreiecke mit derselben Höhe r und der gemeinschaftlichen Spitze O, deren Schwerpunkte sämtlich um

$$OA' = OB' = \frac{2}{3} r$$

von O entfernt sind. Wenn man sich nun das Gewicht jedes dieser Dreiecke in seinen Schwerpunkt konzentriert vorstellt, so entsteht ein homogener Kreisbogen vom Radius $\frac{2}{3} r$, dem Bogen $\frac{2}{3} b$ und der Sehne $\frac{2}{3} s$, dessen Schwerpunkt S zugleich der Schwerpunkt des Kreisausschnittes ist, und man erhält daher x,

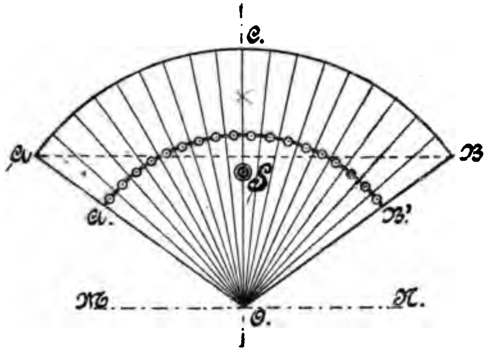


Fig. 80.

wenn man in der 1. Formel des 84. Paragraphen $\frac{2}{3} r$ statt r, $\frac{2}{3} b$ statt b und $\frac{2}{3} s$ statt s setzt, nämlich

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{rs}{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4.$$

Für die besonderen Werte $s = 2r$ und $b = r\pi$ ergiebt sich

$$x = \frac{4r}{3\pi} = \sim 0{,}4244\, r, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5.$$

der Schwerpunktsabstand einer Halbkreisfläche vom Mittelpunkt.

§ 87.

Schwerpunkte von zusammengesetzten ebenen Flächen.

Die vorstehenden Resultate befähigen uns zur Lösung von Aufgaben über Schwerpunkte solcher Flächen, welche sich aus Dreiecken, Parallelogrammen, Trapezen und Kreissektoren zusammensetzen lassen, indem wir in Bezug auf passend gewählte Achsen die Momentengleichungen aufstellen. Ist dabei die betreffende Fläche symmetrisch gestaltet, so genügt eine Momentenachse, welche wir senkrecht zur Symmetrielinie legen; dagegen macht sich bei nicht symmetrischen Figuren zur völligen Bestimmung des Schwerpunktes die Annahme von zwei Momentenachsen notwendig. Die folgenden drei Aufgaben mögen das Nähere erkennen lassen!

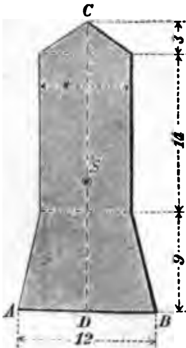


Fig. 81.

Erste Aufgabe. Die Figur 81 mit eingetragenen Abmessungen ist zu CD symmetrisch und besteht aus einem Trapez, einem Rechteck und einem Dreieck; man soll den Abstand $DS = x$ des Schwerpunktes von AB berechnen.

Auflösung: In der folgenden Tabelle sind die Inhalte, Schwerpunktsabstände und statischen Momente sowohl für das ganze Flächengebilde als auch für dessen einzelne Teile zusammengestellt:

Fläche	Inhalt	Abstand des Schwerpunktes von AB	Statisches Moment in Bezug auf AB
Trapez	90	$\frac{12+16}{12+8} \cdot \frac{9}{3} = \frac{42}{10}$	$90 \cdot \frac{42}{10} = 378$
Rechteck	112	$9 + \frac{14}{2} = 16$	$112 \cdot 16 = 1792$
Dreieck	12	$9 + 14 + \frac{3}{3} = 24$	$12 \cdot 24 = 288$
Ganze Figur	214	x	$214\,x$

Mithin haben wir, AB als Momentenachse betrachtet, die Gleichung

$$214x = 378 + 1792 + 288 = 2458$$

oder

$$x = \frac{2458}{214} = \mathbf{11{,}486.}$$

Liegt also der Aufgabe das Centimeter als Längeneinheit zu Grunde, so ist der Schwerpunkt von AB um *11,486 cm* oder rund *115 mm* entfernt.

Zweite Aufgabe. Das in Fig. 82 dargestellte Flächenstück setzt sich aus einem Halbkreis mit dem Radius $CA = CB = CD = r$ und einem gleichschenkligen Dreieck mit der Basis $AB = 2r$ zusammen. Es soll die Höhe $CE = x$ so bestimmt werden, dass der Schwerpunkt der Gesamtfläche nach C fällt.

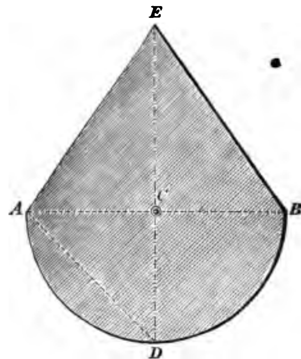


Fig. 82.

Auflösung: Offenbar wird die Bedingung der Aufgabe erfüllt, wenn in Bezug auf AB das Moment des Dreiecks gleich dem Momente des Halbkreises, wenn also

$$r\,x \cdot \frac{x}{3} = \frac{r^2\pi}{2} \cdot \frac{4\,r}{3\,\pi},\ x^2 = 2\,r^2$$

oder

$$x = r\sqrt{2}$$

ist. Die Dreieckshöhe $CE = x$ kann konstruktiv durch Verbindung von A mit D erhalten werden; denn es ist nach dem Pythagoräischen Lehrsatz

$$AD = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2\,r^2} = r\sqrt{2} = x = CE.$$

Dritte Aufgabe. Die Figur 83 zeigt eine aus drei Rechtecken bestehende unsymmetrische Fläche mit eingeschriebenen Massen.

Um die Lage des Schwerpunktes zu erfahren, beziehen wir die statischen Momente einmal auf die Achse AC, wodurch

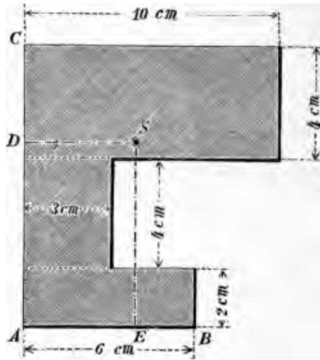


Fig. 83.

$SD = x$ und ein zweites Mal auf AB, wodurch $SE = y$ erhalten wird; denn aus der nachstehenden Tabelle

Fläche	Inhalt	Abstand des Schwerpunktes		Statisches Moment in Bezug	
		von AC	von AB	auf AC	auf AB
Unteres Rechteck	12 qcm	3 cm	1 cm	$12 \cdot 3 = 36$	$12 \cdot 1 = 12$
Mittleres Rechteck	12 qcm	$\frac{3}{2}$ cm	4 cm	$12 \cdot \frac{3}{2} = 18$	$12 \cdot 4 = 48$
Oberes Rechteck	40 qcm	5 cm	8 cm	$40 \cdot 5 = 200$	$40 \cdot 8 = 320$
Gesamtfläche	64 qcm	x cm	y cm	$64\,x$	$64\,y$

folgen die beiden Beziehungen

$$64\,x = 36 + 18 + 200 = 254$$

und

$$64\,y = 12 + 48 + 320 = 380,$$

also

$$x = 3\,\frac{31}{32} = 3{,}969 \text{ und } y = 5\,\frac{15}{16} = 5{,}938,$$

sodass der Schwerpunkt S von AC um 3,969 cm oder rund 39,7 mm und von AB um 5,938 cm oder rund 59,4 mm absteht.

§ 88.

Übungsbeispiele.

239. Ein Trapez mit den parallelen Seiten $a = 234\,cm$, $b = 166\,cm$ besitzt die Höhe $h = 360\,cm$; man berechne den Abstand des Schwerpunktes von a.

Resultat: $169{,}8\,cm$.

240. Desgleichen, wenn $a = 2\,m$, $b = 5\,m$ und $h = 14\,m$ gegeben sind.

Resultat: $x = 8\,m$.

241. Man soll den Schwerpunkt eines halben regelmässigen Sechseckes bestimmen, wenn die Teillinie durch zwei Eckpunkte geht.

Lösung: Er ist von letzterer um $x = \frac{2}{9} a \sqrt{3}$ entfernt, unter a die Seite des regulären Sechsecks verstanden.

242. Eine Kreissektorfläche ist bestimmt durch $r = 333\,mm$ und $\alpha = 77^0$; man berechne den Abstand des Schwerpunktes vom Centrum.

Resultat: $x = 205{,}67\,mm$.

243. Desgleichen, wenn $r = 0{,}876\,m$ und $\alpha = 192^0\,46'$ ist.

Resultat: $x = 0{,}345\,m$.

244. Die Figur 84 besteht aus zwei Rechtecken mit den Seiten $JG = a$, $JK = CE = b$ und $CD = c$ und ist in Bezug auf AB symmetrisch; wie weit ist der Schwerpunkt von JK entfernt?

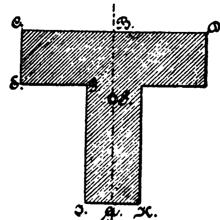


Fig. 84.

Antwort: Um $x = \frac{a^2 + 2\,a\,c + b\,c}{2\,(a + c)}$.

245. Wie gestaltet sich das letzte Resultat, wenn beide Rechtecke kongruent sind?

Antwort: $x = \frac{3\,a + b}{4}$.

246. Ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $AD = a$ $BC = b$ hat zwei rechte Winkel DAB und ABC; welches ist die Entfernung des Schwerpunktes von AB?

Antwort: $x = \frac{a^2 + a b + b^2}{3(a + b)}$.

247. Ein reguläres Sechseck von der Seite a wird durch eine zu zwei Seiten senkrechte Gerade halbiert; in welcher Entfernung x von letzterer liegt der Schwerpunkt einer solchen Hälfte?

Antwort: In der Entfernung $x = \frac{7}{18} a$.

248. Wo liegt der Schwerpunkt einer homogenen Fläche, welche aus einem Halbkreise vom Durchmesser $AB = 2r$ und einem gleichschenkligen Trapeze mit den parallelen Seiten $AB = 2r$, $CD = r$ und der Höhe $OE = r$ zusammengesetzt ist?

Antwort: Im Mittelpunkte O des Halbkreises.

§ 89.

Einiges über die Schwerpunkte der Körper.

Dasselbe Grundmittel, welches bisher benutzt wurde, den Schwerpunkt eines Gebildes zu bestimmen und welches darin bestand, letzteres in Teile zu zerlegen, deren Schwerpunkte bereits bekannt sind, dient auch meist mit Erfolg zur Erlangung des Schwerpunktes homogener Körper. Wir stellen uns nämlich den betreffenden Körper aus unendlich vielen und daher unendlich dünnen parallelen Schichten, d. h. also aus homogenen ebenen Flächen zusammengesetzt vor und wenn dann deren stetig aneinander gereihten Schwerpunkte in einer Geraden liegen, so haben wir auf diese Weise eine Schwerlinie festgestellt.

Denkt man sich beispielsweise die Höhe eines Prismas in unbeschränkt viele gleiche Teilchen eingeteilt und durch jeden Teilungspunkt eine Ebene parallel zur Grundfläche des Prismas gelegt, so wird letzteres in unzählige unter sich kongruente und daher gleich schwere Platten zerschnitten, deren Schwerpunkte eine homogene Strecke bilden; der Mittelpunkt dieser letzteren ist demgemäss zugleich der Schwerpunkt vom Prisma, und es gilt der Satz:

Der Schwerpunkt eines Prismas halbiert die Verbindungslinie der Schwerpunkte beider parallelen Endflächen, ist folglich von der Basis um

$$x = \frac{h}{2}$$

entfernt, wenn h die Höhe des Prismas bezeichnet. Offenbar ist in vorstehender Formel auch der Schwerpunktsabstand des homogenen Cylinders enthalten, insofern letzterer nur einen besonderen Fall des Prismas darstellt.

Ebenso zerlegen wir die Pyramide in unendlich viele zur Grundfläche parallele Schichten, deren sämtliche Schwerpunkte auf einer von der Spitze nach dem Schwerpunkte der Basis gezogenen Geraden liegen. Allein weil diese Schichten untereinander ganz verschieden sind, so ist die genannte Schwerlinie allerdings nicht homogen, sondern gleich lange Stückchen derselben haben ein um so grösseres Gewicht, je näher sie der Pyramidenbasis sind, weshalb auch der Schwerpunkt mehr nach der letzteren hin liegen muss.

Ferner ist es in dieser Auffassung begründet, dass der Schwerpunkt eines Pyramidenstumpfes in der Verbindungsstrecke der Schwerpunkte beider Endflächen sich befindet und endlich auch, dass für jeden homogenen Körper, welcher durch Drehung irgend einer ebenen Figur um eine feste Achse entstanden gedacht werden kann, diese letztere zugleich Schwerachse ist. So liegt z. B. der Schwerpunkt eines Kegels, eines Kegelstumpfes, eines Kugelabschnittes etc. in der Achse dieser Körper, d. h. vertikal über dem Mittelpunkte der Grundfläche und das nämliche gilt auch für einen lotrecht aufgeführten homogenen Turm, für einen Fabrikschornstein u. s. w.

§ 90.

Experimentelle Bestimmung des Schwerpunktes.

Wenn aber die bisher entwickelten Formeln, bzw. Konstruktionsmethoden nicht mehr ausreichen, so kann die Lage des Schwerpunktes für ein gegebenes Gebilde nötigenfalls auch noch in der Weise ausfindig gemacht werden, dass man letzteres an einem dünnen Faden aufhängt (Fig. 85) und hernach zur Ruhe kommen lässt; denn dann ist der Körper im Gleichgewichte und folglich muss die Verlängerung $a\,b$ des geradlinig gespannten Fadens durch den Schwerpunkt gehen.

Ein zweites derartiges Experiment liefert eine zweite Schwerlinie *c d* (Fig. 86) und damit zugleich den Schwerpunkt *S* als Durchschnitt zweier Geraden *a b* und *c d.*

Praktischen Wert hat dies Verfahren insbesondere für lang gestreckte Körper und ebene Flächen, welche man auch, anstatt sie aufzuhängen, auf einer scharfen Schneide ausbalancieren kann.

Um beispielsweise die Schwerpunktslage für den Normalquerschnitt einer Eisenbahnschiene zu erhalten, schneiden wir denselben aus einem Stück überall gleich starker Pappe heraus und schieben dann die erhaltene Figur auf einer vertikal aufwärts gerichteten Schneide (Fig. 87) so lange hin und her, bis erstere

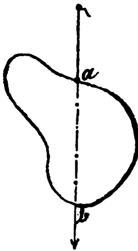


Fig. 85.

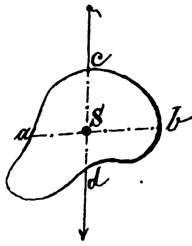


Fig. 86.

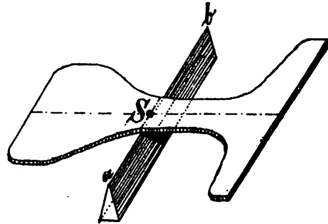


Fig. 87.

horizontal schwebt. In diesem Momente liegt der Schwerpunkt *S* genau senkrecht über der Schneide *a b*, und ist, da er zugleich der Symmetrieachse angehört, auf diese Weise bestimmt.

Freilich ist von den Resultaten dieser Methode kein allzu hoher Genauigkeitsgrad zu verlangen; doch dürfte letzterer in vielen Fällen der Praxis als genügend betrachtet werden können.

§ 91.

Die drei möglichen Gleichgewichtsfälle.

Wie bereits erläutert wurde, ist das Gewicht jedes Körpers eine Kraft, welche im Schwerpunkte angreift und vertikal abwärts wirkt. Wenn daher irgend ein Körper nur dem Einfluss der Schwerkraft ausgesetzt ist, so bewegt sich sein Schwerpunkt in einer geraden Linie nach dem Erdmittelpunkte hin, weshalb diese Linie auch die Falllinie des Körpers genannt wird.

Findet dagegen die durch den Schwerpunkt gehende lotrechte Gerade, also die Falllinie, feste Unterstützung, — sei es, dass der Körper in einer durch die gedachte gerade Linie gehenden Achse aufgehängt ist oder aber mit einer senkrecht unter dem Schwerpunkte liegenden Stelle auf einer horizontalen Ebene

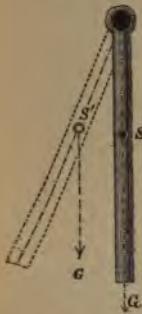


Fig. 88.



Fig. 89.



Fig. 90.



Fig. 91.

ruht — so äussert sich das Gewicht durch einen Druck auf den Stützpunkt und wird nach dem zweiten Grundgesetz durch einen gleich grossen Gegendruck aufgehoben, *der Körper befindet sich also im Gleichgewichte.*

Wenn jetzt dieser Körper durch irgend eine seitlich wirkende Kraft etwas aus seiner Lage herausgebracht wird, so kann der

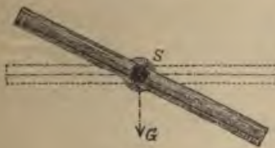


Fig. 92.

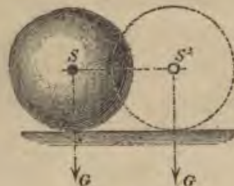


Fig. 93.

Schwerpunkt hierdurch entweder höher oder tiefer zu liegen kommen, oder aber in seiner ursprünglichen Höhe verbleiben, im letzteren Falle also entweder seine Lage gar nicht ändern, oder sich auf einer horizontalen Linie bewegen.

Nach Wegfall der das Gleichgewicht störenden Kraft wird der Körper im zuerst genannten Falle in seine Anfangslage zurückkehren (Figuren 88 und 89) und man sagt dann, er war im *stabilen* Gleichgewichte. Im zweiten Falle sucht sich der Körper

eine neue Gleichgewichtslage, und man nennt sein ursprüngliches Gleichgewicht ein labiles (Figuren 90 und 91). Im dritten Falle ist der Körper in jeder Lage sofort wieder im Gleichgewicht, letzteres war und ist ein indifferentes (Figuren 92 und 93).

Hiernach ist z. B. im indifferenten Gleichgewicht jede auf einer horizontalen Ebene ruhende homogene Kugel, ferner jeder mit einer Seitenlinie aufliegende homogene Cylinder oder auch Kegel, und irgend ein mit einer Fläche auf horizontaler Ebene stehender Körper befindet sich in stabilem oder labilem Gleichgewichte, jenachdem der Fusspunkt des vom Schwerpunkte auf die Unterstützungsfläche herabgelassenen Lotes innerhalb oder auf die Begrenzungslinien der letzteren fällt.

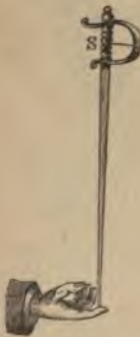


Fig. 94.


Fig. 95.


Fig. 96.

Ferner kann ein auf seiner Spitze balanciertes Schwert (Fig. 94) nur im labilem Gleichgewichte sein, ebenso eine rechteckige überall gleich dicke und homogene Platte (Fig. 96), welche in horizontaler Lage mit dem Schnittpunkt beider Diagonalen auf die Spitze einer vertikal gerichtete Nadel gesetzt wird, während der in Figur 95 veranschaulichte, aus einem Korke, einer Stecknadel und einem schneckenförmig gewundenen Drahte angefertigte Körper stabiles Gleichgewicht besitzt, sobald sein Schwerpunkt unter der Nadelspitze liegt.

Speziell im Maschinenbau muss jedes Maschinengestell in stabilem und jedes um eine horizontale Achse drehbare Rad zur Beförderung eines gleichmässigen Ganges möglichst in indifferentem Gleichgewicht sich befinden.

Achtes Kapitel.

Die einfachen Maschinen ohne Rücksicht auf Reibung.

§ 92.
Definitionen.

Schon in § 27 wurde der Begriff „Maschine“ festzustellen versucht, jedoch mehr im Hinblick auf ihren technischen Zweck. Rein sachlich könnte man jede Maschine auch bezeichnen als eine Verbindung von festen, beweglichen und unbeweglichen Körpern, an welchen sich zwei oder mehr Kräfte durch Abänderung ihrer Angriffspunkte, ihrer Richtung und Stärke das Gleichgewicht zu halten imstande sind. So ist z. B. ein gewöhnlicher Flaschenzug als Maschine zu betrachten, weil an ihm die Muskelkraft und das Gewicht eines Arbeiters, welche am freien Seilende wirken, einer verhältnismässig grossen, an der unteren Flasche hängenden Last das Gleichgewicht zu halten vermögen.

Jede Maschine heisst nun einfach, wenn in ihr lediglich ein beweglicher Körper vorkommt, oder, was auf dasselbe hinaus läuft, wenn in ihr kein Bestandteil selbst wieder Maschine ist. Gewöhnlich zählt man zu den einfachen Maschinen den Hebel, die Rolle, das Rad an der Welle, die schiefe Ebene, den Keil und die Schraube. Als Grundlage können aber ausschliesslich der Hebel und die schiefe Ebene gelten; denn die Rolle und das Wellrad sind nur besondere Formen des Hebels und der Keil, sowie die Schraube lassen sich leicht auf die schiefe Ebene zurückführen.

§ 93.
Der Hebel.

Es ist dies ein starrer und um eine feste Achse drehbarer Körper, an welchem zwei oder mehr Kräfte wirken.

Der kürzeste Abstand zwischen Drehachse und der Wirkungslinie einer solchen Kraft heisst wieder der Hebelsarm und das Produkt aus jeder Kraft und ihrem Hebelsarm das statische Moment der Kraft.

Dann halten sich nach dem letzten Satze in § 71 beliebig viele an einem Hebel wirksamen Kräfte das Gleichgewicht, wenn die algebraische Summe ihrer auf die Drehachse bezogenen statischen Momente gleich Null ist.

Allerdings wurde hierbei stillschweigend vorausgesetzt, dass jede Kraft in einer zur Hebelachse lotrechten Ebene wirkt; allein sollte dies ausnahmsweise einmal nicht der Fall sein, so braucht man nur die betreffende Kraft in zwei Komponenten zu zerlegen, von welchen die eine parallel, die andere rechtwinklig zur Drehachse läuft; denn die erstere sucht den Hebel in der Achsenrichtung zu verschieben und wird von den Zapfenlagern aufgenommen, kommt also hier nicht weiter in Betracht. Dagegen hat die andere Komponente lediglich eine Drehbestrebung und ist daher an die Stelle der ursprünglichen Kraft in die obige Gleichgewichtsbedingung einzuführen. Jedoch tritt dieser Fall in der Praxis nur äusserst selten auf, und wir dürfen deshalb in den folgenden Aufgaben und Beispielen annehmen, dass sämtliche Kräfte rechtwinklig zur Drehachse des Hebels gerichtet sind.

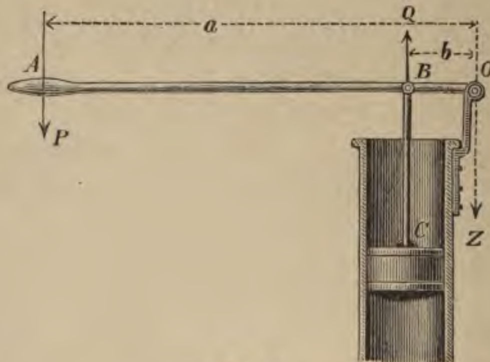


Fig. 97.

Was ferner den auf die Drehachse, bzw. auf die Zapfenlager ausgeübten Druck anbelangt, so ist derselbe identisch mit der Resultierenden R sämtlicher am Hebel wirksamen Kräfte, daher, falls letztere parallel gerichtet sind, nach § 72 gleich der algebraischen Summe derselben.

Wir wollen diese allgemeinen Angaben an drei besonderen Fällen verfolgen.

Erstens. Figur 97 veranschaulicht eine Druckpumpe, auf deren um den Punkt O drehbaren Schwengel $OA = a$ am Handgriffel A die Kraft P rechtwinklig zu OA ausgeübt wird. Hierdurch entsteht in der zu P parallelen Stange BC der Druck Q, welcher sich auf den Kolben selbst überträgt und eine gleich grosse Gegenwirkung erzeugt, sowie im Zapfen O der Druck Z. Beide sollen berechnet werden, indem man den Hebelsarm OB von Q mit b bezeichnet.

Lösung: In Bezug auf den Drehpunkt gilt die Momentengleichung

$$Q b - P a = o$$

und hieraus ergiebt sich der Kolbendruck

$$Q = \frac{a}{b} P.$$

Ferner muss die algebraische Summe aller parallelen Kräfte

$$P + Z - Q = o$$

und mithin der Zapfendruck

$$Z = Q - P = \frac{a - b}{b} P$$

sein.

Beispielsweise würde man für $a = 120\ cm$, $b = 21\ cm$ und $P = 14\ kg$ den Kolbendruck

$$Q = \frac{120}{21} \cdot 14 = 80\ kg$$

und den Zapfendruck

$$Z = 80 - 14 = \frac{99}{21} \cdot 14 = 66\ kg$$

erhalten.

Das Eigengewicht der Hebelstange durfte hier vernachlässigt werden, weil sein Moment demjenigen von P oder Q gegenüber nur unerheblich war. Anderenfalls ist dies aber durchaus nicht gestattet, wie z. B. in folgender Aufgabe.

Zweitens. Das Figur 98 dargestellte Sicherheitsventil soll vermittels des um C drehbaren Hebels CB durch ein verschiebbares Gewicht Q so belastet werden, dass es sich bei einem Überdruck des Dampfes von p Atmosphären, d. h. dann öffnet, wenn

die Dampfspannung den Quadratcentimeter Kesselwand mit p Kilogramm beansprucht. Bezeichnen nun

G das Gewicht des Hebelkörpers } in Kilogrammen,
K „ „ „ Ventilkegels nebst Zubehör }
a den Hebelsarm von K }
b „ „ „ Q } in Centimetern
c „ „ „ G }

und d den Durchmesser des unteren, dem Dampfdruck ausgesetzten Teiles vom Ventile ebenfalls in Centimetern, so stelle man die allgemeine Gleichgewichtsbedingung derart auf, dass bei Erhöhung des Kesseldrucks das Ventil beginnen würde, abzublasen.

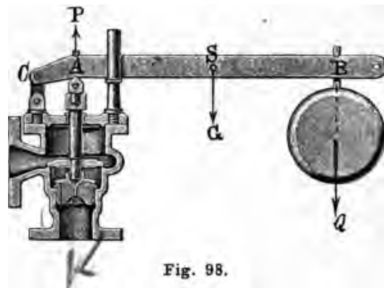


Fig. 98.

Lösung: Der Überdruck des Dampfes auf die kreisförmige Unterfläche des Ventiles ist $\frac{d^2 \pi}{4} \cdot p$, er wirkt in der nämlichen Linie wie K, nur entgegengesetzt, sodass in A die Kraft

$$P = \frac{d^2 \pi}{4} \cdot p - K$$

mit dem Arm a das Ventil zu heben sucht. Die andern Kräfte Q und G haben das Bestreben, den Hebel in umgekehrtem Sinne zu drehen und folglich besteht die Momentengleichung

$$Q b + G c - P a = o,$$

welche mit Einsetzung des obigen Wertes von P übergeht in

$$Q b + G c + K a = \frac{1}{4} a d^2 \pi p,$$

die verlangte allgemeine Gleichgewichtsbedingung. Aus derselben kann jede der acht Grössen a, b, c, d, p, G, K und Q

bestimmt werden, sobald die übrigen sieben bekannt sind. Als gesuchte Werte kommen aber in der Praxis nur p, b und Q in Frage, wenn das Ventil nebst Zubehör fertiggestellt vorliegt. Der Druck im Zapfen C findet sich

$$Z = Q + G - P = Q + G + K - \frac{d^2 \pi}{4} \cdot p.$$

Wir nehmen spezieller Weise an, der Ventilhebel, dessen Gewicht $G = 1{,}5\ kg$ im Abstande $c = 32\ cm$ vom Drehpunkt wirkt, soll durch ein Laufgewicht $Q = 12\ kg$ so belastet werden, dass das mit Zubehör $0{,}8\ kg$ wiegende Ventil bei 3 Atmosphären Kesseldruck abzublasen beginnt und fragen nach der Entfernung b, in welcher das Belastungsgewicht Q angebracht werden muss, sobald noch $a = 7{,}5\ cm$ und $d = 6\ cm$ gegeben sind.

Mit Einführung vorstehender Zahlwerte in die obige allgemeine Gleichgewichtsbedingung entsteht

$$12\, b + 1{,}5 \cdot 32 + 0{,}8 \cdot 7{,}5 = \frac{1}{4} \cdot 7{,}5 \cdot 36 \cdot 3{,}1416 \cdot 3$$

oder

$$b + 4 + 0{,}5 = 9 \cdot 7{,}5 \cdot 0{,}7854 = 53{,}0145$$

und hieraus folgt

$$b = 48{,}5145 = \sim \mathbf{48{,}5\ cm},$$

die Belastung Q müsste also $485\ mm$ vom Drehpunkt C abstehen.

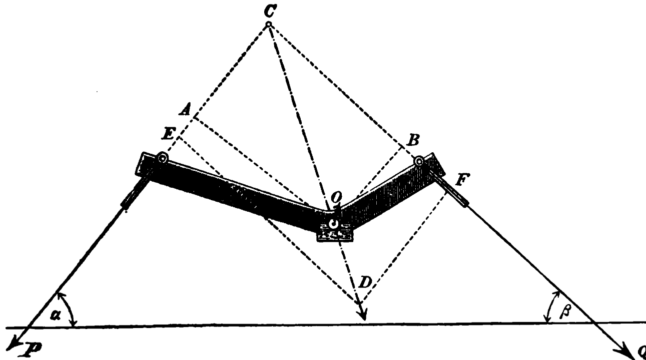


Fig. 99.

Drittens. In Figur 99 wirken auf den um O drehbaren Hebelkörper zwei Kräfte P und $Q = 180\ kg$, welche mit dem Horizont die Winkel $\alpha = 58^0$ und $\beta = 27^0$ einschliessen, während die von O auf beide Kraftrichtungen gefällten Perpendikel $O\,A = p = 81\ cm$ und $O\,B = q = 45\ cm$ sind. Man soll nun P so bestimmen, dass Gleichgewicht herrscht und ausserdem den in O

stattfindenden Druck Z, beides, ohne auf das Eigengewicht des Hebels Rücksicht zu nehmen.

Lösung: Aus der Gleichgewichtsbedingung

$$Qq - Pp = o \text{ oder } Pp = Qq$$

folgt

$$P = \frac{q}{p} Q = \frac{45}{81} \cdot 180 = \mathbf{100\ kg.}$$

Behufs Bestimmung des Zapfendruckes Z verfolgen wir den konstruktiven Weg, indem wir unter Annahme einer passenden Längeneinheit für das Kilogramm die beiden Kräfte Q und P in ihren Wirkungslinien bis an den Schnittpunkt C verlegen, also $CF = 180$ und $CE = 100$ (etwa Millimeter) machen, hierauf zum Parallelogramm $CEDF$ ergänzen und darin die Diagonale CD ziehen. Letztere stellt dann als Resultante aus P und Q den Zapfendruck Z dar, sie muss durch den Drehpunkt gehen und da ihre Länge das 198fache der gewählten Einheit beträgt, so ist der Zapfendruck

$$Z = \mathbf{198\ kg.}$$

Schliesslich sei noch erwähnt, dass man die Hebel einteilen kann:

erstens in mathematische und physische, jenachdem man vom Eigengewichte des Hebelkörpers absieht oder dasselbe berücksichtigt,

zweitens in geradlinige (Figuren 100 bis 102) und Winkelhebel (Figur 103), jenachdem die Kräfte parallel sind oder nicht, jenachdem also die Hebelsarme eine gerade Linie oder Winkel bilden und, wenn nur zwei Kräfte wirken,

drittens in einarmige (Figuren 101 und 102) und zweiarmige Hebel (Figuren 100 und 103), jenachdem der Drehpunkt ausserhalb oder innerhalb der beiden Punkte liegt, in welchen die Kräfte den Hebel angreifen.

Der Hebel kommt in den mannigfaltigsten Formen zur Anwendung, z. B. zweiarmig als Hebebaum, Wage, Scheere (Fig. 104), Bohrer, Pumpenschwengel, ferner einarmig als Schubkarren, Schraubenzieher, Kurbel, Sicherheitsventil, Nussknacker (Fig. 105), Drücker am Schloss etc. etc.

Aber nicht bloss in der Technik und dem praktischen Leben spielt der Hebel eine wichtige Rolle, sondern auch in der Natur, besonders im Organismus der Menschen und Tiere. So beruht

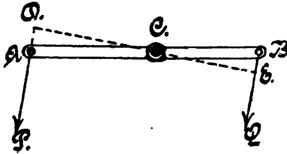


Fig. 100.

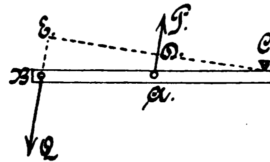


Fig. 101.

z. B. die Bewegung jedes Gliedes auf Hebelwirkung. Um dies zu zeigen betrachten wir den menschlichen Arm in Figur 106. Der Unterarm A kann gedreht werden um den Punkt O und zwar

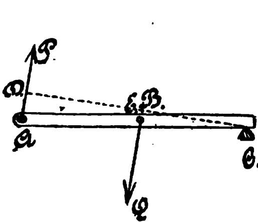


Fig. 102.

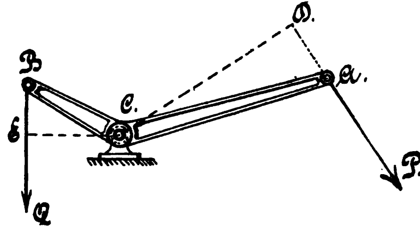
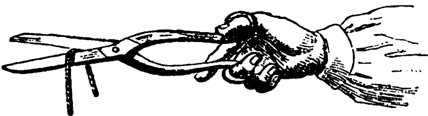
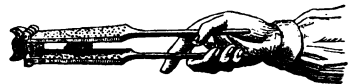


Fig. 103.

durch einen Muskel, welcher in a an ersterem und in c am Knochen des Oberarmes befestigt ist. Verkürzt sich nun der Muskel durch willkürliche Zusammenziehung, wobei eine Kraft P ausgeübt wird,


Fig. 104.


Fig. 105.

so hebt sich der Unterarm A und umgekehrt. Der Hebelsarm von P ist das von O auf P gefällte Lot $O\,a$.

§ 94.

Übungsbeispiele.

249. Unter welcher Bedingung wirkt ein physischer zweiarmiger Hebel genau so wie ein mathematischer?

Antwort: Wenn der Schwerpunkt des Hebelkörpers in der Drehachse liegt.

250. An den Endpunkten A und B eines gewichtslosen Stabes (Fig. 100) von der Länge a wirken die beiden Lasten P und Q. In welcher Entfernung von A muss sich der Stützpunkt C befinden, damit Gleichgewicht stattfindet?

Antwort: In der Entfernung $AC = \frac{aQ}{P+Q}$.

251. Eine homogene prismatische Stange CA (Fig. 102) von der Länge a und dem Gewichte G ist um C drehbar und im Abstande $CB = b$ durch Q belastet. Man bestimme die in A

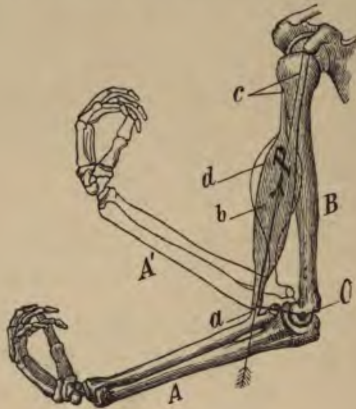


Fig. 106.

vertikal aufwärts wirkende und zur Herstellung des Gleichgewichtszustandes nötige Kraft P, sowie den im Punkte C herrschenden Druck D.

Resultate: $P = \frac{b}{a} Q + \frac{G}{2}$ und $D = Q + G - P$.

252. Die Länge eines Hebels aus Metall von $12\ kg$ Gewicht und prismatischer Form sei $3\ m$, sein Stützpunkt von dem mit $80\ kg$ belasteten Ende $0{,}6\ m$ entfernt. Welches Gewicht am anderen Ende bringt den Hebel ins Gleichgewicht?

Antwort: $15{,}5\ kg$.

253. Man will einen hartgebrannten Ziegelstein auf seinen Widerstand gegen das Zerdrücken untersuchen und stellt ihn zu

diesem Behufe derartig unter einen *3 m* langen einarmigen Hebel (Fig. 107), dass die obere *20 cm* lange und *5 cm* breite Ziegelfläche vom Hebelkörper vollständig überdeckt und ihre Mittellinie von der Drehachse um *10 cm* entfernt ist, während man das freie Hebelende vermittelst einer Wagschale so lange belastet, bis der Bruch des Ziegels erfolgt. Wenn nun der letztere bei *270 kg* Belastung zerdrückt wird, welchen Druck pro *qcm* kann dann ein Ziegelstein derselben Qualität in der äussersten Grenze vertragen?

Antwort: Einen Druck von *81 kg.*

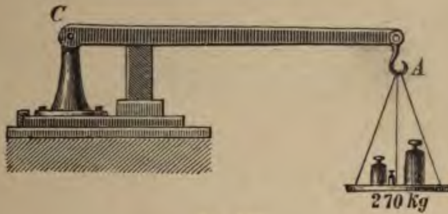


Fig. 107.

254. Der Kolben einer Druckpumpe (Fig. 108) wird vermittelst eines Schwengels durch die Kraft $P = 16\ kg$ in Bewegung gesetzt. Wie viel Druck kommt auf den *qcm* der kreisförmigen Kolbenfläche von *8 cm* Durchmesser, wenn die Hebelsarme von Kraft und Kolbenstange *1 m* und *15 cm* betragen?

Antwort: *2,122 kg.*

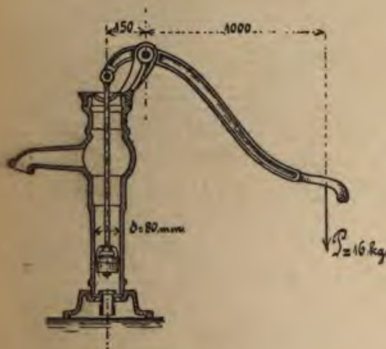


Fig. 108.

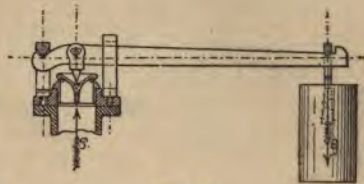


Fig. 109.

255. Die beiden Arme eines Hebelventiles (Fig. 109) sind *13*, resp. *64 cm* lang, und die dem Dampfdruck ausgesetzte Fläche

des Ventiles hat *21 qcm* Inhalt. Mit wie viel *kg* muss nun das äussere Ende des Hebels belastet werden, wenn sich das Ventil bei *5* Atmosphären Überdruck öffnen soll und das Eigengewicht des Apparates vernachlässigt wird?

Antwort: Mit *21,33 kg.*

256. Welches Gewicht dürfte aber bloss angehängt werden, wenn man die Eigengewichte der prismatisch geformten Hebelstange und des Ventiles, welche *6*, resp. *2,5 kg* betragen, in Rücksicht zieht?

Antwort: *17,82 kg.*

257. Auf wie viel Atmosphären könnte der Dampfdruck bei der ersten Belastung von *21,33 kg* thatsächlich steigen, ehe das Ventil sich öffnen würde?

Antwort: Auf *5,82* Atmosphären Überdruck.

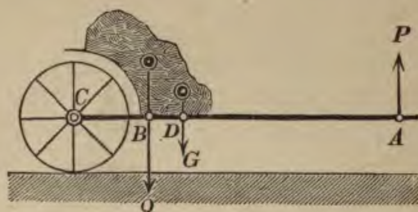


Fig. 110.

258. An einem um den Zapfen C drehbaren Winkelhebel hängt eine Last Q mit dem Hebelarme $CB = b$ und soll im Gleichgewicht erhalten werden von einer am Arme $CA = a$ horizontal wirkenden Kraft P. Es soll P und der Zapfendruck z in O bestimmt werden, wenn die Wirkungslinie vom Eigengewichte G des Hebelkörpers einen senkrechten Abstand $CD = c$ von C besitzt.

Resultate: Es ergiebt sich die Kraft $P = \dfrac{Q\,b + G\,c}{a}$ und der Zapfendruck $z = \sqrt{P^2 + (Q + G)^2}$.

259. Man löse die letzte Aufgabe für die besonderen Zahlenwerte $Q = 650$, $G = 150\ kg$, $b = 0{,}4$, $a = 0{,}6$ und $c = 0{,}1\ m$.

Resultate: $P = 458^1/_3\ kg$, $z = 922\ kg$.

260. Desgleichen, wenn $Q = 225$, $G = 50$, $b = 9$, $a = 10$ und $c = 2{,}5$ sind.

Resultate: $P = 215$ und $z = 349\ kg$.

261. Welche Last Q kann vermittels eines Schubkarrens (Fig. 110) vom Gewichte $G = 24\ kg$ durch die Kraft $P = 45\ kg$ transportiert werden, wenn die Wirkungslinien der Kräfte Q, G und P von der Radachse um $CB = b = 0{,}4\ m$, $CD = c = 0{,}55\ m$ und $CD = a = 1{,}6\ m$ abstehen?

Antwort: $Q = \frac{Pa - Gc}{b} = 147\ kg$.

262. Wie gross ist dabei der Druck auf die Radachse?

Antwort: $z = Q + G - P = 126\ kg$.

§ 95.

Die Rolle.

Man denke sich ein an seinem Umfang durch eine rinnenartige Vertiefung (die Laufrinne, Laufbahn oder Nute) versehenes Rad (Fig. 111 und 112), welches sich um die in einem





Fig. 111.



Fig. 112.

Gehäuse (dem Kloben oder der Scheere) befindliche Achse drehen kann; die Laufrinne dient zur Aufnahme eines Seiles oder einer Kette.

Je nachdem der Kloben selbst befestigt oder beweglich ist, heisst die Rolle eine feste oder lose.

An der festen Rolle (Fig. 113), bei welcher die Last Q an dem einen, die Kraft P an dem andern Seilende wirkt, herrscht aber Gleichgewicht, sobald Kraft und Last einander gleich sind, wenn also die Beziehung

$$P = Q \quad \ldots\ldots \quad 1.$$

besteht; denn die feste Rolle ist ein Hebel mit den gleichen Armen $MA = MB = r$.

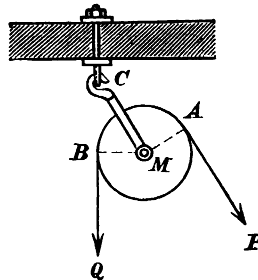


Fig. 113.

Wir erkennen hieraus, dass durch die feste Rolle niemals an Kraft gewonnen werden kann und man benützt deshalb diese einfache Maschine lediglich zur Herbeiführung von Richtungsveränderungen in der Bewegung, aus welchem Grunde die feste Rolle auch Richtungs- oder Leitrolle genannt wird.

Bei der aus Figur 114 ersichtlichen losen Rolle setzen wir voraus, dass die Seilenden parallel laufen. Dann gilt für den Gleichgewichtsfall in Bezug auf den Punkt B die Momentengleichung $Q \cdot BM - P \cdot BA = 0$ oder, weil $BM = r$ und $BA = 2r$ ist, $Q \cdot r - P \cdot 2r = 0$ und hieraus folgt

$$Q = 2P, \quad \ldots\ldots \quad 2.$$

die Bedingung des Gleichgewichts an der losen Rolle bei parallelen Seilenden ohne Rücksicht auf die Reibung und Seilsteifheit, wobei offenbar in Q das Eigengewicht des Rollenkörpers eingerechnet werden muss.

Zu demselben Resultate gelangen wir durch folgende Betrachtung: Die Last Q am Kloben der losen Rolle erzeugt im Seile eine gewisse Spannung S, welche sich gleichmässig im ganzen Seile fortpflanzt und es muss daher S im freien Ende durch eine gleich grosse Gegenkraft aufgehoben werden, mit anderen Worten,

es muss $P = S$ sein. Wir haben also drei parallele Kräfte Q, P und S, deren Angriffspunkte in fester Verbindung stehen und welche sich nach § 72 nur dann das Gleichgewicht halten, wenn ihre algebraische Summe gleich Null, wenn also $Q - S - P = 0$ oder wegen $S = P$ die Last $Q = 2\,P$ ist.

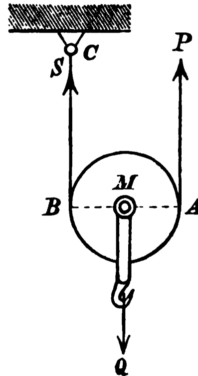


Fig. 114.

§ 96.

Das Rad an der Welle.

Zur Erzielung einer ununterbrochen fortdauernden Hebelwirkung bedient man sich des Wellrades. Es besteht dies in seiner einfachsten Gestalt aus einem um seine Achse drehbaren

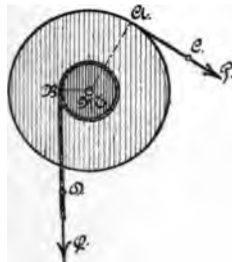


Fig. 115.

Cylinder, auf welchem ein Rad mit gleicher Drehachse befestigt ist. Um den Cylinder ist ein Seil oder eine Kette geschlungen, an welcher die Last $B\,D = Q$ (Fig. 115) hängt, und letztere wird im Gleichgewicht erhalten durch eine tangential an der Peripherie des Rades wirkende Kraft $A\,C = P$.

Das Wellrad ist nun offenbar ein Hebel mit der Drehachse M; der Radius der Welle, $MB = r$, ist der Hebelarm der Last Q, und der Halbmesser des Rades, $MA = R$, ist der Arm der Kraft P; es besteht daher Gleichgewicht unter der Bedingung

$$PR = Qr, \quad \cdots\cdots \quad 1.$$

wenn also das Produkt aus Last und Wellradius gleich dem Produkte aus Kraft und Radhalbmesser ist.*)



Fig. 116.

Diese einfache Maschine tritt unter verschiedenen Formen auf: sie heisst Haspel, wenn die Welle horizontal (Fig. 116), und Winde oder Göpel, wenn die Welle vertikal (Fig. 117)

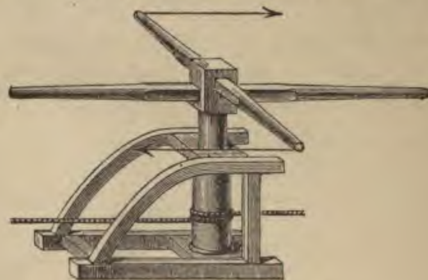


Fig. 117.

steht; beidemale erfolgt die Drehung durch einen oder zwei einarmige Hebel, welche mit der Welle gemeinsame Achse besitzen, und

*) Hierbei ist freilich von der Seilstärke abgesehen worden. Ist diese im Verhältnis zum Halbmesser beträchtlich, so hat man als Hebelsarm von Kraft, resp. Last, dasjenige Lot zu betrachten, welches von der Mitte des aufgewickelten Seiles auf die Drehachse gefällt werden kann.

welche man im ersten Falle, wo sie mit horizontalen Handgriffen versehen sind, „Kurbeln“, im zweiten Falle aber „Zugstangen“ nennt. Hat bei dem Wellrad das Rad eine Auskehlung zur Aufnahme des Seiles, so führt es den Namen Seilrad (Fig. 118),

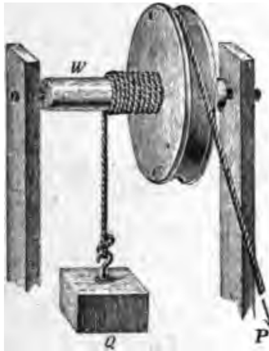


Fig. 118.

und jenachdem bei lotrecht stehender Welle die Kraft von Menschen oder Pferden ausgeübt wird, nennt man die Vorrichtung Erdwinde (Gangspille, Laufspille) oder Pferdegöpel.

§ 97.

Übungsbeispiele.

263. Ein Wellrad besitzt die Radien $R = 0{,}6\,m$ und $r = 0{,}12\,m$. Welcher Last Q kann durch *65 kg* Kraft das Gleichgewicht gehalten werden?

Antwort: Einer Last $Q = 325\,kg$.

264. Wie lang müsste man aber bei sonst gleichen Umständen den Halbmesser R des Rades machen, um einer Last von *500 kg* das Gleichgewicht zu halten?

Antwort: $\frac{12}{13} = 0{,}923\,m$ lang.

265. Mittels eines Wellrades, dessen Halbmesser *120* und *800 mm* betragen, soll eine Last von *600 kg* gehoben werden. Welche Kraft P ist hierzu erforderlich, wenn die Bewegungshindernisse $\frac{1}{4}$ der Last ausmachen?

Antwort: $P = 112{,}5\,kg$.

266. Es soll die allgemeine Gleichgewichtsbedingung für ein Wellrad unter Beachtung der halben Dicke ϱ des Lastseiles angegeben werden, angenommen, dass letzteres in der ersten Lage sich auf die Welle windet.

Lösung: $PR = Q(r + \varrho)$.

267. Ebenso, wenn sich das Seil in zwei, resp. drei Lagen aufwindet.

Lösung: $PR = Q(r + 3\varrho)$, resp. $PR = Q(r + 5\varrho)$.

268. Für ein Seilrad sind die Durchmesser von Welle und Rad d, resp. D, und die Durchmesser der entsprechenden Seile δ, resp. $\mathfrak{d}$. Man entwickele die Gleichgewichtsbedingung unter der Voraussetzung, dass das Lastseil in nur einer Lage sich aufwindet.

Lösung: $P(D + \mathfrak{d}) = Q(d + \delta)$.

269. Man berechne P für den Fall, dass $D = 1{,}985\ m$, $d = 0{,}17\ m$, $\delta = 40\ mm$, $\mathfrak{d} = 15\ mm$ und $Q = 500\ kg$ sei, wenn ausserdem festgestellt ist, dass Reibung und Seilsteifigkeit $^1/_3$ der Last in Anspruch nehmen.

Resultat: $P = 70\ kg$.

270. Mittels einer Erdwinde von *3 m* Durchmesser soll durch eine Kraft von *48 kg* einer Last von *750 kg* das Gleichgewicht gehalten werden. Wie gross muss der Wellendurchmesser sein, wenn die Dicke des Lastseils *35 mm* beträgt.

Antwort: *174,5 mm*.

§ 98.

Die schiefe Ebene.

Die Neigung einer schiefen Ebene GH (Fig. 119) lässt sich folgendermassen bestimmen: Denkt man sich durch GH die lotrechte Ebene und darin durch G eine horizontale, durch H eine vertikale Linie gezogen, so entsteht das rechtwinklige Dreieck GHJ, dessen Seiten $GJ = b$ die Basis, $HJ = h$ die Höhe, $GH = l$ die Länge der schiefen Ebene heissen, und das Verhältnis zweier dieser Seiten giebt dann ein Mass für die Neigung der schiefen Ebene zum Horizont. Im Besonderen pflegt man das Verhältnis $h : l$ die Steigung der Bahn GH zu nennen und wenn es z. B. heisst: die und die Eisenbahnstrecke hat die Steigung $1 : 40$, so

ist damit gemeint: erstere bildet eine schiefe Ebene, deren Höhe h zur Länge l sich wie $1:40$ verhält.

Die Wirkung jeder auf einer solchen schiefen Ebene befindlichen Last Q, welche durch die Strecke ME in Figur 119 versinnlicht sein möge, ist nun offenbar eine doppelte, indem Q einerseits einen Druck rechtwinklig zu GH ausübt und andrerseits einen Zug parallel GH abwärts ausübt, und wir erhalten diese beiden Kräfteäusserungen durch Zerlegen von Q nach genannten

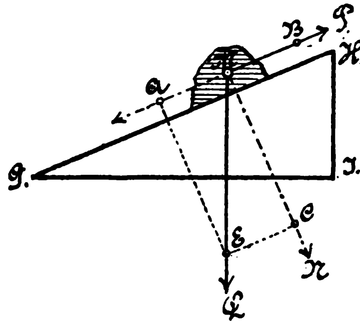


Fig. 119.

Richtungen mit Hilfe des Rechtecks $MAEC$; denn in letzterem stellt

$$MC = N$$

den Normaldruck gegen die schiefe Ebene und

$$MA = CE$$

diejenige Kraft dar, mit welcher Q längs der schiefen Ebene herabgezogen wird. Wegen Ähnlichkeit der Dreiecke MEC und GHJ gelten aber die Proportionen

$$MC : ME = GJ : GH \text{ und } CE : ME = JH : GH$$

oder

$$N : Q = b : l \text{ und } MA : Q = h : l,$$

woraus folgt

$$N = \frac{b}{l} \cdot Q \text{ und } MA = \frac{h}{l} \cdot Q.$$

Die Druckkomponente N wird infolge der Festigkeit der schiefen Ebene durch einen gleich grossen Gegendruck aufgehoben, kann also keine Bewegung erzeugen; dagegen würde, weil

wir vorläufig vom Reibungswiderstande absehen, die andere Seitenkraft MA eine gleichförmig beschleunigte Bewegung abwärts veranlassen und es muss daher zur Erfüllung des Gleichgewichts eine weitere Kraft P angebracht werden, welche im Schwerpunkte M von Q nach rechts wirkt. Setzen wir hinsichtlich der Richtung von P zunächst den einfachsten und wichtigsten Fall $P \parallel HG$ voraus, so herrscht Gleichgewicht, wenn

$$P = MA = \frac{h}{l} \cdot Q$$

ist und die bei diesem Zustande giltigen Proportionen

$$\boldsymbol{P : Q = h : l, \; N : Q = b : l \; \cdots\cdots \; 1.}$$

liefern den Satz: Die parallel zur schiefen Ebene gerichtete Kraft hält der Last das Gleichgewicht, wenn die erstere zur letzteren sich verhält wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge und dabei steht der Normaldruck zur Last in demselben Verhältnis, wie die Basis zur Länge der schiefen Ebene.

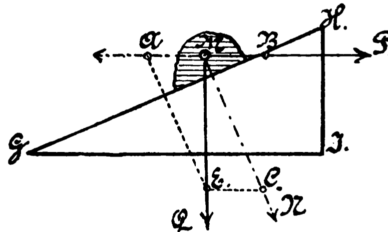


Fig. 120.

Zweitens ist es für später notwendig, diejenige Kraft P ausfindig zu machen, welche parallel zur Basis b wirkt und der Last Q das Gleichgewicht zu halten vermag, sowie auch den hierbei stattfindenden Normaldruck N zu bestimmen.

Zu dem Ende zerlegen wir $ME = Q$ (Fig. 120) rechtwinklig zu HG und HJ mit Hilfe des Parallelogramms $MAEC$ in die Komponenten $MC = N$ und MA. Dann haben wir die Gleichgewichtsbedingung

$$P = MA = CE$$

und es folgen aus der Ähnlichkeit der Dreiecke MCE und GHJ die Proportionen

$$CE : ME = HJ : GJ, \; MC : ME = GH : GJ$$

oder

$$P : Q = h : b \text{ und } N : Q = l : b, \; \cdots\cdots \; 2.$$

d. h. in Worten: Bei horizontal wirkender Kraft herrscht an der schiefen Ebene Gleichgewicht, wenn das Verhältnis aus Kraft und Last übereinstimmt mit dem Verhältnis aus der Höhe und Basis der schiefen Ebene; der Normaldruck auf die Unterlage verhält sich dann zur Last, wie die Länge zur Basis der schiefen Ebene.

Die Last Q auf der schiefen Ebene kann demnach im Gleichgewicht gehalten werden durch die zu l parallele Kraft

$$P = \frac{h}{l} \cdot Q, \; \cdots\cdots \; 3.$$

wobei der Normaldruck

$$N = \frac{b}{l} \cdot Q \; \cdots\cdots \; 4.$$

oder auch durch die zu b parallele Kraft

$$P = \frac{h}{b} \cdot Q, \; \cdots\cdots \; 5.$$

wobei der Normaldruck

$$N = \frac{l}{b} \cdot Q \; \cdots\cdots \; 6.$$

stattfindet. Die geringste Vermehrung von P würde eine Aufwärtsbewegung und die kleinste Verminderung von P eine Abwärtsbewegung von Q zur Folge haben. Auch mag nicht unerwähnt bleiben, dass die Strecken b, h und l nach dem Pythagoras an die Beziehung

$$b^2 + h^2 = l^2 \; \cdots\cdots \; 7.$$

gebunden sind.

§ 99.

Übungsbeispiele.

271. Auf einer schiefen Ebene mit der Steigung $7 : 25$ ruht die Last $Q = 168\ kg$. Welche Kraft P parallel zur ersteren hält ihr das Gegengewicht?

Antwort: $P = 47{,}04\ kg$.

272. Welchen Druck hat dabei die schiefe Ebene auszuhalten?
Antwort: $N = 161{,}28$ *kg*.

273. Wie viel Kraft wäre aber zur gleichförmigen Aufwärtsbewegung dieser Last unter der Annahme erforderlich, dass der Reibungswiderstand den achten Teil des Normaldrucks beträgt?
Antwort: *67,2 kg*.

274. Man berechne die zur Basis b parallele Kraft P, welche auf der nämlichen schiefen Ebene die gleiche Last (ohne Berücksichtigung der Reibung) im Gleichgewicht erhält.
Lösung: $P = 49$ *kg*.

275. Wie hoch beläuft sich hier der Normaldruck?
Antwort: *175 kg*.

276. Bei Eisenbahnzügen pflegt man die sämtlichen Bewegungshindernisse rund zu $\frac{1}{200}$ der Last anzunehmen. Wie viel Zugkraft müsste nun die Lokomotive erstens auf horizontaler Bahn und zweitens bei der Steigung $1:100$ zur Erhaltung einer gleichförmigen Bewegung entwickeln, wenn das Gewicht aller Wagen einschliesslich Lokomotive *140 000 kg* beträgt?
Antwort: *700 kg*, bzw. *2100 kg*.

277. Um wie viel muss eine schiefe Ebene pro *100 m* steigen, wenn die parallel zur letzteren wirkende Kraft von *3 kg* der Last von *150 kg* das Gegengewicht halten soll und hierbei wieder von den Bewegungswiderständen abgesehen wird?
Antwort: Um *2 m*.

278. Auf zwei schiefen Ebenen mit der gemeinschaftlichen Höhe h und den Längen l, resp. l' befinden sich zwei Lasten Q und Q', welche durch ein über eine feste Rolle gelegtes Seil derartig verbunden sind, dass die Enden des letzteren parallel zu l und l' laufen. Welches ist hier die Gleichgewichtsbedingung?
Antwort: Es muss sich $Q : Q' = l : l'$ verhalten.

279. Längs einer schiefen Ebene mit der Höhe h und der Länge l rollte eine Kugel lediglich unter dem Einflusse der Schwerkraft. Die Beschleunigung p dieser Bewegung ist zu ermitteln.
Resultat: $p = \frac{h}{l} \cdot g$, worin $g = 9{,}81$ *m* ist.

---

280. Man bestimme und vergleiche die beiden Endgeschwindigkeiten, welche ein Körper erhält, indem er von der Ruhe aus: erstens die ganze Länge l einer schiefen Ebene durchrollt und zweitens die Höhe der letzteren frei durchfällt, ohne in beiden Fällen die Bewegungswiderstände zu beachten.

Resultat: Sie sind einander gleich, nämlich gleich $\sqrt{2gh}$.

281. Wie verhalten sich aber die entsprechenden Bewegungszeiten?

Antwort: Wie l zu h, also wie die vom Körper zurückgelegten Wege.

§ 100.

Der Keil.

In der Mechanik begreift man unter „Keil" ein dreiseitiges Prisma, dessen normaler Querschnitt entweder ein rechtwinkliges oder ein gleichschenkliges Dreieck ist; im ersten Falle wird der Keil einfach, im anderen Falle doppelt genannt. Diejenige Seite des Dreiecks (eine Kathete vom rechtwinkligen, resp. die Basis vom gleichschenkligen Dreieck), auf welche die Kraft P — und zwar fast immer lotrecht — wirkt, heisst der Rücken, die anderen beiden Dreiecksseiten heissen die Seiten des Keiles; den dem Rücken gegenüberliegenden Winkel nennt man den Keilwinkel und die Entfernung seines Scheitels vom Rücken die Höhe des Keiles.

Wir betrachten zunächst den einfachen Keil in Figur 121, dessen Höhe $JL = h$ auf der Ebene OM ruht und fragen nach jener Kraft P rechtwinklig zum Rücken $KL = b$, welche dem senkrecht zur Seite $JK = l$ wirksamen Widerstande Q das Gleichgewicht zu halten imstande ist.

Zwecks Beantwortung dieser Frage brauchen wir nur den durch die Strecke CD dargestellten Widerstand Q mittels des Rechtecks $CEDF$ in zwei Komponenten CE parallel KL und CF parallel JL zu zerlegen; denn da erstere von der festen Ebene OM aufgenommen wird und demnach lediglich als Normaldruck N gegen OM zur Geltung kommt, so ist die Gleichgewichtsbedingung

$$CF = DE = P.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CDE und JKL ergeben sich aber die Proportionen

$$DE : CD = KL : JK, \text{ sowie } CE : CD = JL : JK$$

oder

$$P : Q = b : l, \text{ sowie } N : Q = h : l$$

und man erhält

$$P = \frac{b}{l} \cdot Q, \quad \ldots\ldots \quad 1.$$

die Kraft, welche am einfachen Keil rechtwinklig zur Seite l den Druck Q auszuüben vermag, sowie

$$N = \frac{h}{l}\, Q, \quad \ldots\ldots \quad 2.$$

den Normaldruck, welcher dabei zwischen dem Keil und seiner Gleitbahn OM stattfindet.

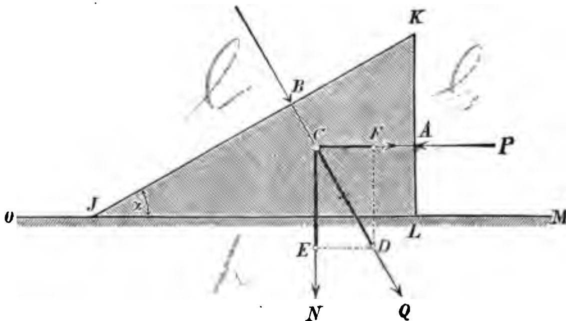


Fig. 121.

Die erste Formel sagt uns, dass die Überwindung eines gewissen Widerstandes Q mit Hilfe des einfachen Keiles um so weniger Kraft erfordert, je kleiner der Rücken b im Verhältnis zur Seite l, oder, was auf dasselbe hinaus kommt, je kleiner der Keilwinkel ist.

Übergehend zum doppelten Keil, von welchem Figur 122 eine Ansicht gewährt, bezeichnen wir wieder den Rücken BD, zu welchem die Kraft P rechtwinklig wirkt, mit b und setzen aber-

mals die Seiten $AB = AD = l$. Die beiden Drücke $FE_1 = FE_2 = Q$ bilden rechte Winkel mit den Seitenflächen AB und AD, sie werden daher vom Keilkörper vollständig aufgenommen und vereinigen sich mittels des Kräfterhombus FE_1GE_2 zur Resultante GF; letztere wirkt in derselben Linie wie P, nur entgegengesetzt, sodass die Bedingung

$$GF = P$$

den Gleichgewichtszustand verbürgt. Weil aber die Seiten der gleichschenkligen Dreiecke E_1FG und ABD paarweise senkrecht aufeinander stehen, also ähnlich sind, gilt die Proportion

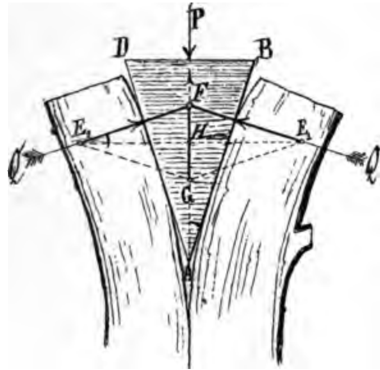


Fig. 122.

$$GF : FE_1 = BD : AB$$

oder

$$P : Q = b : l \quad \ldots\ldots \quad 3.$$

und da die Formeln 1 und 3 genau dasselbe aussagen, so gelangen wir zu dem Schlussergebnis, dass sowohl am einfachen, wie am doppelten Keil Gleichgewicht besteht, wenn die Kraft zur Last, wie der Rücken zur Seite sich verhält.

§ 101.

Übungsbeispiele.

282. Rücken und Höhe eines einfachen Keiles sind *40* und *399 mm* lang. Welchen Druck normal zur Seite kann man mit *10 kg* Kraft lotrecht zum Rücken ausüben?

Antwort: *100,25 kg.*

283. Wie gross ist hierbei der Druck auf die Unterlage des Keiles?

Antwort: *99,75 kg.*

284. Rücken und Seite eines doppelten Keiles verhalten sich wie *3 : 20*. Mit welcher Kraft senkrecht zum Rücken kann man *100 kg* Seitenpressung erreichen?

Antwort: Mit *15 kg.*

285. Man will eine auf einer horizontalen Ebene ruhende Last von *10000 kg* mittels einfachen Keiles, dessen Rücken *48* und dessen Seite *577 mm* betragen, in die Höhe treiben. Welche Kraft ist hierzu nötig, wenn, wie immer, von sämtlichen Reibungswiderständen abgesehen wird?

Antwort: Rund *835 kg*.

286. Wie kann man über die Wirkung einer Kraft P Aufschluss erhalten, wenn dieselbe nicht senkrecht, sondern unter einem Winkel β zum Rücken des Keiles gerichtet ist?

Antwort: Indem man P in zwei Komponenten zerlegt, wovon die eine in die Richtung des Rückens fällt und die andere lotrecht zu letzterem ist; die erste sucht den Keil aus seiner Lage herauszudrehen, die zweite wirkt in der oben angegebenen Weise.

§ 102.

Die Schraube.

Wickelt man um einen Cylinder mit dem Halbmesser $AD = AE = r$ (Fig. 123) und beliebiger Höhe ein rechtwinkliges Dreieck derartig, dass die eine Kathete genau mit der Peripherie des

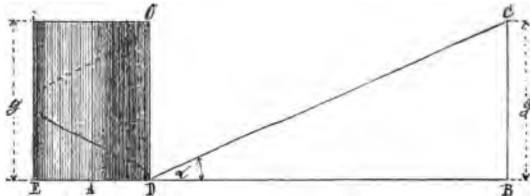


Fig. 123.

Grundkreises zusammenfällt, so bildet die Hypotenuse eine sogenannte Schraubenlinie, für welche aus naheliegendem Grunde $CDB = \alpha$ der Steigungswinkel genannt wird.

Wir wollen der Einfachheit halber erst einmal voraussetzen, dass die Kathete

$$DB = 2\,r\,\pi,$$

also gleich dem Cylinderumfang ist. Dann kommt nämlich C nach der Umwickelung genau lotrecht über den Anfangspunkt D zu liegen, das Kurvenstück DO heisst ein Schraubengang und

der Abstand seiner Endpunkte, welcher parallel zur Cylinderachse läuft,

$$D\,O = B\,C = g$$

die Ganghöhe der Schraubenlinie.

Wenn jetzt ein Rechteck mit einem Eckpunkt dergestalt an der Schraubenlinie hinläuft, dass die eine Nachbarseite auf dem Cylindermantel bleibt und ausserdem die (verlängert gedachte) Ebene des Rechteckes immer durch die Cylinderachse geht, so erzeugt dieses Rechteck ein Schraubengewinde (Figur 124), welches flach oder flachgängig genannt wird. Dagegen entsteht ein scharfes oder scharfgängiges Gewinde (Figur 126), sobald die Erzeugungsfigur ein gleichschenkliges Dreieck ist. In Bezug auf das Gewinde heisst der Cylinder auch Schraubenkern, während Kern und Gewinde zusammen die Namen Schraubenspindel oder Schraubenbolzen führen.



Fig. 124.



Fig. 125.



Fig. 126.

Um aber einen derartigen Körper als Maschine verwenden zu können, bedarf es noch einer sogenannten Schraubenmutter (Fig. 125), das ist ein Hohlcylinder, in dessen Innenwand entsprechende Schraubengänge hohl eingeschnitten sind, sodass die Gewinde von Spindel und Mutter genau ineinander passen und durch Drehung eines der beiden Körper eine fortschreitende Bewegung in der Richtung ihrer gemeinschaftlichen Achse hervorgebracht wird.

Aus alledem geht hervor, dass die Schraube in ihrer mechanischen Wirkungsweise aufgefasst werden kann als die auf einen Cylinder gewickelte schiefe Ebene (Figur 127), deren Höhe $B\,C$ durch die Ganghöhe $A\,D$ und deren Basis $A\,B$ durch den Umfang des Schraubenkernes dargestellt wird.

Wenn nun in der Richtung der Schraubenachse ein Widerstand Q zu überwinden ist durch eine Kraft P' (Fig. 127), welche tangential am Umfange des Schraubenkernes wirkt, so findet der zweite Fall des § 98 statt; denn die Last Q wirkt rechtwinklig und die Kraft P' parallel zur Basis der schiefen Ebene. Zugleich wird man aber auch einsehen, dass als Hebelsarm der Kraft P' nicht der Halbmesser des Schraubenkernes, sondern richtiger das arithmetische Mittel aus dem inneren und äusseren Radius des Schraubengewindes zu setzen ist; denn da alle Druckkräfte auf die Schraubenfläche parallel und nahezu gleich sind, so liegt der resultierende Druck fast genau auf der Mittellinie der Schraubenfläche. Wird daher die Ganghöhe mit g und der

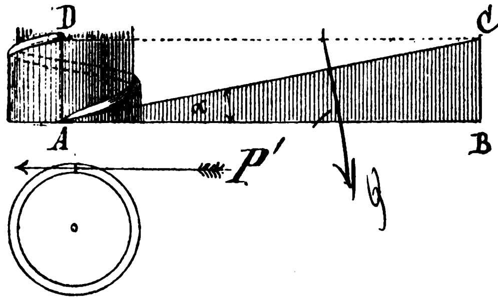


Fig. 127.

mittlere Radius des Schraubengewindes mit r bezeichnet, so ergiebt sich die Gleichgewichtsbedingung für die Schraube dadurch, dass man in der 5. Formel des 98. Paragraphen $P = P'$, $h = g$ und $b = 2\,r\,\pi$ setzt, nämlich

$$P' = \frac{g}{2\,r\,\pi} \cdot Q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1.$$

In den meisten Fällen wird mit dem Schraubenbolzen ein Hebelarm $CA = R$ verbunden (Fig. 128), an welchem die bewegende Kraft P wirkt. Aus

$$PR = P'r$$

folgt aber

$$P' = \frac{R}{r}\,P$$

und mit Einsetzung dieses Wertes in die obige Gleichung für P':

$$\frac{R}{r} P = \frac{g}{2 r \pi} Q$$

oder

$$P = \frac{g}{2 R \pi} Q, \quad \ldots\ldots \quad 2.$$

als Bedingung des Gleichgewichtes für die Schraube ohne Rücksicht auf Reibung.

§ 103.

Übungsbeispiele.

287. Für eine Schraube sind der innere und der äussere Radius des Gewindes *60* und *70 mm*, die Ganghöhe beträgt *4 mm* und das Eigengewicht ist *35 kg*. Welche Kraft muss am mittleren Schraubenbolzenumfang wirken, um einer Last von *350 kg* das Gleichgewicht zu halten, wenn vom Reibungswiderstande abgesehen wird?

Antwort: Die Kraft $P = 3{,}7706\ kg$.

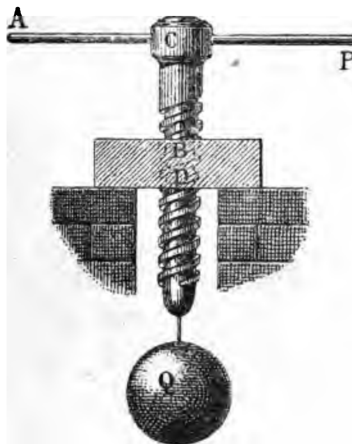


Fig. 128.

288. An dem *0,8 m* langen Hebelsarm einer Schraubenpresse lässt man eine Kraft von *50 kg* wirken. Welcher Druck wird bei *35 mm* Ganghöhe ohne Rücksicht auf Reibung ausgeübt?

Antwort: Der Druck $Q = \frac{2 R \pi P}{g} = 7180{,}8\ kg.$

289. Man hat eine Schraube von *30 mm* Ganghöhe und will mittels derselben durch eine Kraft von *25 kg* einen Druck von *1000 kg* erzeugen. Wie lang muss der Hebelsarm der Kraft genommen werden?

Antwort: $R = \frac{Q\,g}{2\,P\,\pi} = 191\,mm.$

290. Man bestimme das Verhältnis zwischen Kraft und Last an einer Schraube, deren Bolzen *15 cm* Durchmesser hat und deren Ganghöhe *25 mm* beträgt, wenn die Kraft tangential am Umfange des Bolzen wirkt und die Reibung vernachlässigt wird?

Antwort: $P : Q = 1 : 18{,}85.$

291. Welches wäre aber dies Verhältnis, wenn die Kraft an einem *1,57 m* langen Hebelsarm angreift?

Antwort: $P : Q = 1 : 394{,}58.$

292. Mittels einer Schraubenpresse, deren Ganghöhe *25 mm* beträgt, will man einen Druck von *3000 kg* ausüben. Welche Kraft muss an dem *2 m* langen Hebel wirksam sein?

Antwort: Die Kraft $P = 5{,}968\,kg$, also rund *6 kg.*

293. Am Hebelarm derselben Presse lässt man aber jetzt eine Kraft von *50 kg* wirken und fragt nach dem hierdurch hervorgebrachten Druck.

Lösung: $Q = 25132{,}7\,kg.$

294. Wie gross ist die Ganghöhe g einer $G = 100\,kg$ wiegenden Schraube, wenn man mit Hilfe derselben durch eine Kraft $P = 80\,kg$, welche am Hebelsarm $R = 1{,}5\,m$ wirkt, eine Last $Q = 16000\,kg$ zu heben imstande ist?

Antwort: $g = \frac{2\,R\,\pi\,P}{Q + G} = 0{,}04683\,m$, also beinahe *47 mm.*

§ 104.

Mechanische Arbeit der Kräfte an einfachen Maschinen.

Wenn ein mathematischer Hebel, an welchem die Kraft P mit dem Hebelsarm $C\,A = p$ (Fig. 129) der Last Q mit dem Arme $C\,B = q$ das Gleichgewicht hält, sodass

$$P p = Q\,q$$

ist, einen Stoss erhält, so wird der Hebelkörper in Bewegung übergehen. Diese letztere muss aber nach dem Grundgesetze vom Beharrungsvermögen so lange gleichförmig sein, als zwischen den am Hebel wirksamen Kräften Gleichgewicht herrscht, solange also die letzteren selbst unveränderlich sind und gleiche Hebelsarme behalten, d. h. perpendikulär zu CA, resp. zu CB bleiben; denn in diesem Falle wird sich der Hebelkörper genau so verhalten, als wenn die beiden Kräfte P und Q überhaupt gar nicht vorhanden wären — alles das aber immer wieder nur unter der Voraussetzung, dass der Hebel weder von Reibung noch von Luftwiderstand beeinflusst wird.

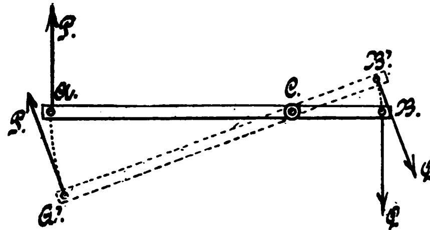


Fig. 129.

Nehmen wir jetzt an, der Hebel habe sich von seiner ursprünglichen Lage aus um den beliebigen Winkel

$$A\,C\,A' = B\,C\,B' = \gamma$$

gedreht, so sind die von den Angriffspunkten A, B der Kraft P, resp. der Last Q zurückgelegten Wege dargestellt durch die Kreisbögen

$$\widehat{AA'} = p\,\gamma, \text{ bzw. } \widehat{BB'} = q\,\gamma,$$

und mithin sind die von P, bzw. Q geleisteten mechanischen Arbeiten

$$P \cdot \widehat{AA'} = Pp\,\gamma, \text{ bzw. } Q \cdot \widehat{BB'} = Q\,q\,\gamma.$$

Multipliziert man aber die Gleichgewichtsbedingung $Pp = Q\,q$ mit γ, so entsteht

$$Pp\,\gamma = Q\,q\,\gamma$$

oder

$$P \cdot \widehat{AA'} = Q \cdot \widehat{BB'},$$

und man erkennt hieraus, dass die von P und Q am Hebel geleisteten Arbeiten einander gleich sind.

Dieser Satz, dessen Richtigkeit auch für die feste Rolle und das Wellrad ohne weiteres einleuchtet, gilt aber unter den oben

gemachten Annahmen auch für mehr als zwei am Hebel wirkenden Kräfte; denn sind letztere allgemein

$$P_1, P_2, P_3, \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot, P_n$$

und ihre zugehörigen Arme

$$p_1, p_2, p_3, \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot, p_n,$$

so ist die Bedingung des Gleichgewichtes

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + P_n p_n = 0,$$

wobei aber die in verschiedenem Sinne drehenden Kräfte mit entgegengesetzten Vorzeichen zu versehen sind. Multipliziert man diese Gleichung mit einem Winkel γ (im Bogenmass), um welchen sich der Hebel nach irgend einer Zeit gedreht haben soll, so folgt

$$P_1 p_1 \gamma + P_2 p_2 \gamma + P_3 p_3 \gamma + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + P_n p_n \gamma = 0,$$

oder, weil die Kreisbögen

$$p_1 \gamma, p_2 \gamma, p_3 \gamma, \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot, p_n \gamma$$

die von den Angriffspunkten der Kräfte beschriebenen Wege

$$s_1, s_2, s_3, \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot, s_n$$

bezeichnen:

$$P_1 s_1 + P_2 s_2 + P_3 s_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + P_n s_n = 0.$$

Mithin ist an einem in gleichförmiger Bewegung begriffenen Hebel innerhalb eines beliebigen Zeitraumes die algebraische Summe der mechanischen Arbeiten sämtlicher Kräfte der Null gleich oder mit anderen Worten: die (absolute) Summe der Arbeiten aller bewegenden Kräfte ist gleich der Summe der Arbeiten, welche die zu überwindenden Widerstände konsumieren.

Hieraus geht hervor, dass mittels eines Hebels in seinen verschiedenen Formen niemals ein Gewinn von mechanischer Arbeit zu erreichen ist; denn, wie man sich gewöhnlich ausdrückt, was an Kraft gewonnen wird, geht an Weg verloren, oder auch, weil die Angriffspunkte von Kraft und Last ihre Wege in derselben Zeit zurücklegen: was an Kraft gewonnen wird, geht an Geschwindigkeit verloren und umgekehrt.

Die Giltigkeit dieses wichtigen Satzes ist zwar von bedeutenden Mathematikern für alle einfachen und zusammengesetzten Maschinen und unter allen möglichen Umständen bewiesen worden — wir wollen uns aber an dieser Stelle darauf beschränken, seine Richtigkeit nur noch an der schiefen Ebene zu zeigen.

Hierbei können wir uns unter Vernachlässigung der Reibung auf den günstigsten Fall beschränken, dass die Kraft parallel zur schiefen Ebene wirkt.

Wenn nun die zur schiefen Ebene GH parallele Kraft P die Last Q durch die ganze Länge l der ersteren gleichförmig aufwärts bewegt, so ist die von P geleistete mechanische Arbeit

$$A = Pl$$

oder, weil nach § 98

$$P = Q\frac{h}{l}$$

ist,

$$A = Q\frac{h}{l} \cdot l = Qh.$$

Die genau gleiche Arbeit müsste aber auch ohne schiefe Ebene aufgewendet werden, um die nämliche Last Q auf dieselbe Höhe h direkt vertikal emporzuheben, sodass also vermittelst der schiefen Ebene gleichfalls kein Arbeitsgewinn erzielt werden kann, selbst wenn von der Reibung abstrahiert und der Arbeitskraft P die vorteilhafteste Richtung angewiesen wird.

In dem oben ausgesprochenen allgemeinen Prinzip, welches von manchen die „goldene Regel der Mechanik" genannt wird, erkennen wir unschwer eine Anwendung des in § 41 abgeleiteten Satzes von der Erhaltung der Arbeit auf die einfachen Maschinen.

Man kann aber jetzt auch umgekehrt dieses Gesetz dazu benützen, um für die Maschinen die Gleichgewichtsbedingung zu entwickeln, indem man für eine bestimmte Zeit die mechanischen Arbeiten von Kraft und Last einander gleich setzt, wobei jedoch vorerst von allen Bewegungswiderständen abgesehen werden muss.

So ist z. B. für das Wellrad nach genau einmaliger Umdrehung der Kraftweg $2R\pi$ und der Lastweg $2r\pi$, mithin die Gleichgewichtsbedingung $2R\pi P = 2r\pi Q$ oder

$$PR = Qr,$$

wie wir schon in § 96 gefunden hatten.

Als zweites Beispiel wählen wir eine Bewegungsschraube, wie sie Fig. 128 zeigt, und bezeichnen wieder den Hebelsarm CA der Kraft P mit R, die Ganghöhe des Gewindes mit g. Dann legen bei einmaliger Umdrehung P und Q die Wege $2R\pi$, bzw. g zurück, und es folgt hieraus die Gleichgewichtsformel

$$2R\pi P = gQ,$$

welche ebenfalls schon früher, nämlich in § 102, abgeleitet worden ist.

Neuntes Kapitel.

Die gleitende Reibung mit besonderer Berücksichtigung der Zapfenreibung und das Bremsdynamometer.

§ 105.

Einleitung.

Es wurde schon wiederholt erwähnt, dass die im vorigen Kapitel aufgestellten Gleichgewichtsbedingungen keinen Anspruch auf genaue Giltigkeit mehr machen können, sobald die Maschine in Gang gebracht werden soll; denn die bewegende Kraft P hat dann ausser der Last, oder dem Widerstande Q, bzw. dem Eigengewichte G gewisser Maschinenteile auch noch andere Hindernisse zu überwinden, wodurch die bisher entwickelten Gesetze eine Abänderung erfahren. Das bei weitem grösste Bewegungshindernis ist aber in vielen Fällen die Reibung (Friktion), und wir können uns deshalb einer näheren Betrachtung, sowie späteren Berechnung dieser Widerstandskraft nicht entziehen.

Wenn nämlich zwei feste Körper zusammengepresst werden, so äussert sich gegen das Verschieben derselben in der Richtung der Berührungsflächen stets ein gewisser Widerstand, welcher Reibung genannt wird und offenbar daher rührt, dass die Körper an ihren Oberflächen nie absolut glatt, sondern mit geringeren oder grösseren Unebenheiten behaftet sind, selbst dann, wenn letztere nicht gefühlt oder mit blossem Auge gesehen werden können. Diese Unebenheiten greifen wegen des genannten Druckes in einander ein und müssen folglich während der Bewegung auseinander gehoben oder umgebogen oder gar abgerissen werden.

Aus dieser Erklärung folgt zunächst unmittelbar, dass die Reibung erstens in der Richtung der Berührungsflächen und zweitens der beabsichtigten oder bereits vorhandenen Bewegung direkt entgegenwirkt, also hindernd bei Erzeugung, fördernd bei Hemmung der letzteren.

Ferner ist jetzt auch unschwer vorauszusehen, dass der Reibungswiderstand im allgemeinen abhängen muss von dem Stoffe, aus welchem die sich reibenden Körper bestehen und von der Beschaffenheit der Berührungsflächen. Der Reibungswiderstand wird um so kleiner sein, je härter die Körper sind und je glatter die sich berührenden Oberflächen, dagegen grösser bei weichen Körpern mit rauhen Berührungsflächen. Sodann leuchtet wohl ein, dass gute Schmiermittel, wie Öl, Fett und Seife die Reibung zu vermindern imstande sind, weil sie die Vertiefungen in den sich berührenden Flächen ausfüllen und auf diese Weise den letzteren einen höheren Grad von Glätte verleihen. Ebenso lässt sich im voraus vermuten, dass die Reibung zwischen zwei Körpern, welche längere Zeit in gleicher Lage gegeneinander gedrückt wurden, grösser ist, als zwischen fortwährend bewegten Körpern, besonders wenn letztere weich sind und rauhe Oberflächen besitzen; denn im ersten Falle könnten sich die Erhöhungen des einen inniger mit den Vertiefungen des anderen verbinden. Dies ist der Grund, warum man sich zu einer Unterscheidung zwischen „Reibung der Ruhe“ und „Reibung der Bewegung“ genötigt sah.

Alles dies sind indessen lediglich Betrachtungen allgemeiner Natur, welche uns noch nicht befähigen, den Reibungswiderstand in Rechnung zu ziehen. Um letzteres zu erreichen, mussten mit den häufiger vorkommenden Körpern Reibungsversuche angestellt werden, welche wir im nächsten Paragraphen beschreiben wollen.

Vorher sei nur noch kurz erwähnt, dass man nach Art der Bewegung der reibenden Körper zwischen einer gleitenden und einer rollenden oder wälzenden Reibung unterscheidet. Bei der ersteren bewegen sich die einzelnen Punkte des Körpers in der Richtung der Berührungsfläche, bei der letzteren haben die Oberflächenpunkte eine drehende und zugleich fortschreitende Bewegung. Als besondere Art der gleitenden Reibung ist diejenige zwischen einem um seine geometrische Achse rotierenden Zapfen und seinem Lager, die sogenannte Zapfenreibung, hervorzuheben.

§ 106.

Reibungsversuche und Reibungsgesetze.

Um nun Näheres über die Reibung zu erfahren und womöglich die Gesetze zu entdecken, welchen dieser Widerstand unter-

worfen ist, entschloss sich im Jahre 1781 der Franzose Coulomb, zunächst die gleitende Reibung zwischen verschiedenen Körpern und unter den mannigfaltigsten Verhältnissen direkt zu messen.

Hierzu bediente er sich eines Apparates (Fig. 130), welchen er Tribometer (Reibungsmesser) nannte und welcher der Hauptsache nach in folgendem bestand:

An einem kleinen Schlitten, welcher durch Gewichte beliebig belastet werden kann und auf horizontalen Schienen D ruht, ist in A eine Schnur befestigt, welche in ebenfalls horizontaler Richtung über eine feste Rolle B läuft und an deren Ende eine Wagschale hängt.

Galt es nun die Reibung der Ruhe zu erfahren, so wurde die Schale so lange belastet, bis der Schlitten anfing, sich mit ganz geringer Geschwindigkeit zu bewegen; denn in diesem

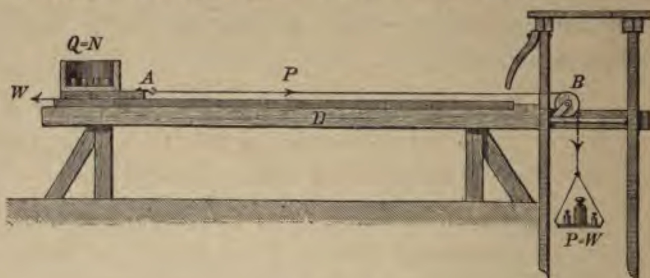


Fig. 130.

Momente stellte die Belastung mit Eigengewicht der Wagschale, P, den Widerstand W dar, welchen der Schlitten nach längerer Ruhe infolge der Reibung jeder Bewegung entgegensetzte, sobald man von der sehr geringen Reibung an den Zapfen der Rolle absieht.

Wenn es sich dagegen darum handelte, die Reibung während der Bewegung zu bestimmen, so war natürlich nur diejenige Last P massgebend, welche genügte, um die bereits eingeleitete Bewegung im langsamen und gleichförmigen Gange zu erhalten.

Indem nun Coulomb den Schlitten bald mehr, bald weniger belastete, sowie Schienen und Schlittenkufen nicht blos aus den verschiedensten Stoffen, sondern auch mit verschiedenen Breiten und Oberflächenbeschaffenheiten anwendete, hatte er es in der

Hand, die Reibungswiderstände unter allen möglichen Umständen zu messen und konnte dann aus dem gesammelten reichen Beobachtungsmaterial seine Schlüsse ziehen.

Unter der einschränkenden Voraussetzung, dass die sich reibenden Körper an den Berührungsflächen einen gewissen Grad von Ebenheit und Glätte besitzen, und sich während der Bewegung weder bedeutend erwärmen, noch merklich abnützen, gelangte Coulomb zu folgenden Sätzen:

Erstens. Der Reibungswiderstand ist proportional dem Normaldruck zwischen den Berührungsflächen der sich reibenden Körper.

Zweitens. Die gleitende Reibung ist unabhängig von der Grösse der Fläche, mit welcher die Körper sich berühren, wenn nur dieselbe nicht so klein ist, dass sich der eine Körper in den andern eindrückt.

Drittens. Die Reibung während der Bewegung ist unabhängig von der Geschwindigkeit; d. h. die erstere bleibt unter sonst gleichen Umständen die nämliche, ob nun der reibende Körper rasch oder langsam dahin gleitet.

Viertens. Die Reibung der Ruhe unterliegt zwar auch den beiden ersten Gesetzen, ist aber in vielen Fällen erheblich grösser als diejenige der Bewegung.

Im Laufe der Zeit erfuhren aber wenigstens einige dieser Sätze Anzweiflung, und deshalb unternahm es im Jahre 1831 Morin, die Reibungsversuche seines Landsmannes in grösserem Massstabe und mit verbesserten Apparaten, bzw. feineren Messinstrumenten zu wiederholen.

Durch Vergleichung der Resultate seiner zahlreichen und mit äusserster Sorgfalt ausgeführten Versuche gelangte Morin zu dem Ergebnis, dass die von Coulomb aufgefundenen Gesetze der gleitenden Reibung vollständig richtig seien.

Allerdings scheinen nach den allerneuesten Reibungsversuchen von Rennie, Bochet, A. Hirn und anderen das zweite und dritte der obigen Gesetze einer Abänderung, bzw. Ergänzung bedürftig

zu sein; allein weil die Sache gegenwärtig noch nicht völlig spruchreif ist und ausserdem für die gewöhnlichen Fälle der Praxis kaum ins Gewicht fällt, so stützen wir uns bei der weiteren Behandlung dieses Gegenstandes lediglich auf die obigen vier Hauptsätze.

§ 107.

Der Reibungskoëffizient.

Man denke sich zwei bestimmte Körper erst mit einem Druck von *1 kg* und dann mit einem beliebigen Druck von N Kilogrammen rechtwinklig zur Berührungsfläche zusammengepresst und bezeichne die hierdurch entstehenden Reibungswiderstände mit f, bzw. W; dann gilt nach dem ersten Erfahrungsgesetz von Morin die Proportion

$$f : W = 1 : N,$$

woraus folgt

$$f = \frac{W}{N}, \quad \ldots \ldots \quad 1.$$

oder, weil f der Reibungskoëffizient für die obigen beiden Körper genannt wird, die Wortgleichung

$$\textit{Reibungskoëffizient} = \frac{\textit{Reibungswiderstand}}{\textit{Normaldruck}}.$$

Aus der obigen Beziehung ergiebt sich

$$W = f \cdot N, \quad \ldots \ldots \quad 2.$$

sodass, wenn für einen bestimmten Fall f und N bekannt sind, der Reibungswiderstand erhalten werden kann, indem man den Normaldruck mit dem Reibungskoëffizienten multipliziert.

Am allereinfachsten bestimmt sich der Reibungswiderstand W unter der Bedingung, dass ein lediglich von der Schwerkraft beeinflusster Körper auf horizontaler Ebene ruht. Denn dann ist der Normaldruck N gleich dem Gewicht G des Körpers und folglich der Reibungswiderstand

$$W = f\,G. \quad \ldots \ldots \quad 3.$$

Weil die Reibung in der Richtung der Berührungsfläche wirkt, so kann im vorliegenden Falle der betreffende Körper bewegt werden durch eine dem Reibungswiderstande gleiche Kraft

$$P = W = f\,G,$$

welche ebenfalls horizontal gerichtet ist.

§ 108.

Übungsbeispiele.

295. Ein Schlitten, welcher samt Belastung *1500 kg* wiegt, wird auf horizontaler Bahn durch eine ebenfalls horizontal wirkende Kraft gleichmässig fortbewegt. Zwischen dem Schlitten und der Zugkraft ist eine Federwage eingeschaltet, welche auf *55 kg* zeigt. Wie gross berechnet sich hieraus der Reibungskoëffizient in der Bewegung?

Antwort: $f = \frac{11}{300} = 0{,}0367.$

296. Welches war der Reibungskoëffizient in der Ruhe, wenn bei Beginn der Bewegung eine Zugkraft von *105 kg* nötig war?

Antwort: $f_0 = 0{,}07.$

297. Eine horizontal gerichtete Kraft P erteilt einem Körper vom Gewichte G auf horizontaler Ebene die Beschleunigung p Meter. Man ermittele den hierbei wirksamen Reibungskoëffizienten unter der Annahme, dass der Luftwiderstand ohne wesentlichen Einfluss auf die Bewegung ist.

Lösung: $f = \frac{P}{G} - \frac{p}{g}$, worin $g = 9{,}81\,m$ die Fallbeschleunigung bedeutet.

298. Welches würde demnach der Reibungskoëffizient für den Fall sein, dass auf diese Weise einem Körper von *90 kg* durch eine Kraft von *30 kg* eine Beschleunigung von *23* Dezimetern erteilt wird?

Antwort: $f = 0{,}099 \sim 0{,}1.$

299. Man gebe eine Formel für den Reibungskoëffizienten an, wenn unter den in Aufgabe 297 angeführten Umständen der Körper in t Sekunden vom Ruhezustande aus s Meter zurücklegt.

Lösung: $f = \frac{P}{G} - \frac{2\,s}{g\,t^2}.$

300. Die letzte Aufgabe für die speziellen Zahlenwerte $P = 12\,kg$, $G = 130\,kg$, $s = 17{,}1\,m$ und $t = 10''$ zu lösen.

Resultat: $f = 0{,}057.$

301. Der kleinste aller bis jetzt bekannten Koëffizienten der gleitenden Reibung ist nach Rennie derjenige bei Eisen auf Eis,

nämlich *0,0143*. Wenn nun ein *80 kg* schwerer Schlittschuhläufer in einem gewissen Moment eine Geschwindigkeit von *12 m* besitzt, wie lange und wie weit wird er dann noch lediglich infolge der Trägheit, und abgesehen vom Luftwiderstand, dahin gleiten?

Antwort: In $t = \frac{c}{fg} = 85{,}54$ Sekunden wird er noch $s = \frac{c^2}{2fg} = 513{,}2\ m$ weit laufen, doch werden diese Zahlen in Wirklichkeit durch den Einfluss des Luftwiderstandes erheblich verringert.

302. Welche Verzögerung erfährt ein beliebiger auf horizontaler Ebene fortgestossener Körper lediglich durch Einwirkung der gleitenden Reibung mit dem Koëffizienten f?

Antwort: $p = fg$.

303. Ein Eisenbahnzug hat die Geschwindigkeit $v = 12\ m$ erlangt. Welche Strecke s wird er nach abgesperrtem Dampfe auf horizontaler Bahn ohne Rücksicht auf Luftwiderstand noch zurücklegen, wenn der Reibungskoëffizient $f = 0{,}005$ ist?

Antwort: $s = \frac{v^2}{2fg} = \frac{144}{0{,}0981} = 1468\ m.$

304. Wie hoch berechnet sich die Dampfkraft einer Lokomotive, welche auf horizontaler Strecke einem Zuge in $t = 240''$ eine Geschwindigkeit $v = 12\ m$ mitteilt, wenn die Lokomotive und sämtliche Wagen eine Last $Q = 100000\ kg$ repräsentieren und der Reibungskoëffizient $f = 0{,}005$ ist?

Antwort: $P = Q\left(f + \frac{v}{gt}\right) = 1010\ kg.$

305. Mit wieviel Pferdestärken muss die Lokomotive arbeiten, um die in voriger Aufgabe gestellten Bedingungen zu erfüllen?

Antwort: Mit $N = \left(f + \frac{v}{gt}\right)\frac{Qv}{150} = 80{,}8$ Pferdestärken.

§ 109.

Koëffizienten der gewöhnlichen gleitenden Reibung nach Morin.

Aus den Versuchen von Morin ergaben sich die Koëffizienten der gleitenden Reibung für die Körper aus den häufig vorkommenden Materialien in den verschiedenen Beschaffenheiten ihrer

Oberflächen. Sie finden sich in jedem Lehrbuch der Mechanik, sowie Ingenieurkalender, und wir wollen hier nur einige der wichtigsten anführen. In der folgenden Tabelle, welche der „Hütte" entnommen ist, bedeutet =, dass die Bewegung in der Richtung der Fasern beider Körper, ±, dass sie normal gegen die Fasern des gleitenden Körpers und ⊥, dass sich Hirnholz auf Langholz in der Faserrichtung des letzteren bewegt.

Namen der reibenden Körper.	Lage der Fasern	Zustand der Oberflächen	Reibungskoëffizient der Ruhe	Reibungskoëffizient der Bewegung
Gusseisen auf Gusseisen oder Bronze		wenig fettig	*0,16*	*0,15*
	.	mit Wasser	.	*0,31*
Schmiedeeisen auf Schmiedeeisen		trocken	.	*0,44*
	.	wenig fettig	*0,13*	.
Bronze auf Gusseisen . .	.	trocken	.	*0,21*
Bronze auf Schmiedeeisen .	.	etwas fettig	.	*0,16*
Bronze auf Bronze . . .	.	trocken	.	*0,20*
Gusseisen auf Eiche . . .	=	trocken	.	*0,49*
	=	mit Wasser	*0,65*	*0,22*
	=	trockne Seife	.	*0,19*
Schmiedeeisen auf Eiche .	=	mit Wasser	*0,65*	*0,26*
	=	mit Talg	*0,11*	*0,08*
Eiche auf Eiche	=	trocken	*0,62*	*0,48*
	=	trockne Seife	*0,44*	*0,16*
	±	trocken	*0,54*	*0,34*
	±	mit Wasser	*0,71*	*0,25*
	⊥	trocken	*0,43*	*0,19*
Rindsleder auf Eiche . .	hohe Kante	trocken	*0,43*	*0,33*
		mit Wasser	*0,79*	*0,29*
Leder-Riemen auf Eichentrommel	=	trocken	*0,47*	*0,27*
Hanfseil auf Eiche . . .	=	trocken	*0,80*	*0,52*
Leder-Riemen auf Gusseisen	flach	trocken	*0,54*	*0,30*
	flach	mit Wasser	*0,38*	*0,36*
Rindsleder als Kolbenliderung	flach	mit Wasser	*0,62*	.
	flach	Öl, Seife	*0,12*	.

§ 110.

Zapfenreibung.

Da die Zapfenreibung nur eine spezielle Art der gleitenden Reibung ist, so gelten natürlich für erstere auch die gleichen Gesetze wie für letztere. Bezeichnet daher φ den Reibungskoëffizienten, so ist, wie früher, der Widerstand bei der Zapfenreibung

$$W = \varphi\, N,$$

sobald N den Normaldruck zwischen den reibenden Flächen bedeutet.

Was nun den Koëffizienten φ der Zapfenreibung anlangt, so ist derselbe nach Versuchen von Morin bei Zapfen aus Schmiedeeisen oder Gusseisen, laufend in Lagern aus Gusseisen, Glockengut oder Messing, geschmiert mit Talg, Öl oder Schweinefett:

bei ununterbrochener guter Unterhaltung $= 0{,}054$
und bei gewöhnlicher Abwartung $= 0{,}07$ bis $0{,}08$.

Dagegen ergaben neuere Versuche von Waltjen und Rühlmann, welche mit einer grossen Anzahl von Schmiermitteln ausgeführt wurden, dass der Wert von φ meist zwischen $0{,}02$ und $0{,}03$ liegt und endlich findet Kirchweger den Koëffizienten der Zapfenreibung bei Schmierung mit Rüböl oder Kohäsionsöl

1. für Schmiedeeisen auf Bronze $= 0{,}014$ und
2. für Schmiedeeisen auf Weissguss $= 0{,}01$.*)

Stimmen auch die Ergebnisse der letzteren Versuche nicht überein, so zeigen sie doch, dass die Koëffizienten der Zapfenreibung jedenfalls erheblich kleiner sind, als die von Morin angegebenen Werte.

§ 111.

Reibung am cylindrischen Tragzapfen.

Nach § 105 wirkt der Reibungswiderstand stets in der Richtung der Berührungsflächen, demnach bei einem horizontalen und cylinderförmigen Zapfen in der Richtung der Tangenten

---

*) Kirchweger schloss ausserdem aus seinen Versuchen, dass der Reibungskoëffizient unabhängig sei vom spezifischen Druck und von der Geschwindigkeit.

am Cylindermantel, mithin ist in Bezug auf die Drehachse sein Hebelsarm gleich dem Halbmesser r des Zapfens und sein statisches Moment

$$\boldsymbol{M = W r = \varphi N r}, \cdots\cdots \mathbf{1.}$$

dass heisst: Das Reibungsmoment für einen cylindrischen Tragzapfen ist gleich dem Produkte aus dem Reibungskoëffizienten, dem Normaldruck und dem Zapfenhalbmesser.

Die zur Überwindung der Reibung nötige mechanische Arbeit ist gleich Widerstand mal Weg, also während einer Umdrehung des Zapfens

$$W s = W \cdot 2 r \pi = 2 \pi r \varphi N,$$

folglich, wenn n die Tourenzahl bezeichnet, innerhalb einer Minute

$$A = 2 \pi r \varphi N n$$

und mithin

$$\boldsymbol{E = \frac{2 \pi}{60} r \varphi N n}$$

die Arbeitsgrösse, welche die Zapfenreibung während einer Sekunde beansprucht. Wird r in Metern und N in Kilogrammen ausgedrückt, so ergiebt sich aus der letzten Gleichung E in Meterkilogrammen; man erhält daher mittels Division durch 75

$$\mathfrak{N} = \frac{E}{75} = \frac{2 \pi}{60 \cdot 75} r \varphi N n$$

oder, weil

$$\frac{2 \pi}{60 \cdot 75} = 0{,}0013962 = \sim 0{,}0014$$

ist:

$$\boldsymbol{\mathfrak{N} = 0{,}0014\, r \varphi N n}, \cdots\cdots \mathbf{2.}$$

den durch die Reibung am cylindrischen Tragzapfen pro Sekunde verursachten Arbeitsverlust in Pferdestärken.

Wäre z. B. der Zapfendruck *8000 kg*, der Zapfenradius *6 cm*, der Reibungskoëffizient *0,05* und die Umdrehungszahl in der Minute 7, so hätten wir in der letzten Formel

$$r = 0{,}06;\ \varphi = 0{,}05;\ N = 8000;\ n = 7$$

zu setzen und bekämen

$$\mathfrak{R} = 0{,}0014 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}05 \cdot 8000 \cdot 7 = 0{,}2352;$$

die Zapfenreibung würde also in diesem Falle nicht ganz $^1/_4$ Pferdestärke konsumieren.

§ 112.

Zapfenreibung am Wellenrade.

Die Kraft P hat den Halbmesser R des Rades und die Last Q den Halbmesser r' der Welle zum Hebelsarm; das Gewicht des Wellrades sei G, der Zapfendruck N, der Zapfenradius r und der Reibungskoëffizient φ. Dann ist die Bedingung für den Zustand der gleichförmigen Bewegung im Sinne der Kraft:

$$PR = Q\,r' + \varphi\,N\,r. \quad \cdots\cdots \quad 1.$$

Der Zapfendruck hängt hierbei offenbar von den am Wellenrade wirksamen Kräften P, Q, G und den Richtungen derselben ab; wir können uns diesbezüglich auf die Anführung der am häufigsten vorkommenden Fälle beschränken:

Erstens. Sind P, Q und G parallel, so haben wir

$$N = Q + G \pm P,$$

jenachdem P vertikal abwärts oder vertikal aufwärts wirkt; mithin geht die erste Gleichung dieses Paragraphen über in

$$PR = Q\,r' + \varphi\,(Q + G)\,r \pm \varphi\,P\,r,$$

woraus folgt

$$P = \frac{Q\,r' + (Q + G)\,r\,\varphi}{R \mp r\,\varphi}$$

als diejenige Kraft, welche sowohl die Last Q als auch die Zapfenreibung zu überwinden imstande ist. Man hat hierbei das obere oder das untere der beiden Vorzeichen im Nenner zu nehmen, jenachdem P lotrecht nach unten oder lotrecht nach oben wirkt; es ist leicht zu übersehen, dass bei allen möglichen Richtungen, die P haben kann, im ersten Fall der Zapfendruck und mithin auch die Reibung — unter sonst gleichen Umständen — am grössten, dass dagegen im letzten Falle N und W am kleinsten

ausfallen. Das obere Zeichen liefert daher für P den möglichst grossen, das untere den möglichst kleinen Wert.

Zweitens. In der Regel bildet die Kraft P einen rechten Winkel mit Q und G, und man hat dann nach dem Pythagoräischen Lehrsatz

$$N = \sqrt{P^2 + (Q + G)^2}.$$

Mit Einführung dieses Wertes in die 1. Beziehung würden wir aber eine für P quadratische Gleichung und für die Anwendung viel zu umständliche Ausdrücke erhalten. Wir benützen daher Poncelets Näherungsformel

$$\sqrt{P^2 + (Q + G)^2} = 0{,}4\, P + 0{,}96\, (Q + G),$$

wodurch unter der in unserem Falle stets erfüllten Bedingung, dass

$$P < G + Q$$

ist, höchstens um $4\,\%$ vom wahren Werte abgewichen wird — ein Fehler, welcher kaum in Betracht kommt, wenn man an die unsichere Bestimmung des Reibungskoëffizienten und an die vielen Zufälligkeiten denkt, welche letzteren beeinflussen können. Wir setzen den obigen Näherungswert in No. 1 ein, erhalten

$$P R = Q r' + 0{,}4\, P r \varphi + 0{,}96\, (Q + G)\, r \varphi$$

und somit

$$P = \frac{Q r' + 0{,}96\, (Q + G)\, r \varphi}{R - 0{,}4\, r \varphi}.$$

Wenn endlich drittens die Kraft P an einer Kurbel normal zur letzteren arbeitet, so erleidet der Zapfendruck eine beständige Änderung und schwankt zwischen den beiden äussersten Werten $Q + G + P$ und $Q + G - P$, ist also im Mittel $Q + G$. Für

$$N = Q + G$$

ergiebt sich aber aus 1

$$P R = Q r' + (Q + G)\, r \varphi$$

und folglich ist

$$P = \frac{Q r' + (Q + G)\, r \varphi}{R}$$

diejenige durchschnittliche Kraft, welche an einer Kurbel die Last Q, sowie die Zapfenreibung überwinden kann.

Soll beispielsweise mittels eines *50 kg* schweren Haspels, für welchen der Seiltrommelhalbmesser *120 mm*, der Zapfenradius *25 mm* und die Kurbellänge *360 mm* betragen, bei einem Reibungskoëffizienten *0,06* die Last von *300 kg* gehoben werden, so erhalten wir die hierzu notwendige Kraft aus der letzten Formel durch Einsetzen von $G = 50$, $r' = 120$, $r = 25$, $R = 360$, $Q = 300$ und $\varphi = 0{,}06$, nämlich

$$P = \frac{300 \cdot 120 + 350 \cdot 25 \cdot 0{,}06}{360} = 101{,}46\ kg,$$

während ohne Zapfenreibung nur *100 kg* erforderlich wären; die letztere beansprucht also knapp $1^1/_2$ % der aufzuwendenden Kraft.

§ 113.

Zapfenreibung an der Rolle.

Bezeichnet man die Radien der festen Rolle und des Zapfens mit R bzw. r und nimmt zunächt an, dass P und Q gleich gerichtet sind, so ist bei Vernachlässigung des geringen Eigengewichtes der Rolle der Zapfendruck

$$N = P + Q,$$

mithin der Widerstand der Zapfenreibung

$$W = N\varphi = (P + Q)\,\varphi,$$

und es folgt aus der Gleichgewichtsbedingung

$$P R = Q R + (P + Q)\, r\, \varphi:$$

$$\boldsymbol{P = \frac{R + r\varphi}{R - r\varphi}\, Q}, \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{1.}$$

die Kraft, welche Q gleichmässig zu heben fähig ist.

Soll dagegen die Last Q nur am Zurückgehen gehindert werden, so wirkt die Zapfenreibung gegen letzteres und im Sinne von P, es ist daher die Gleichgewichtsbedingung

$$P R + (P + Q)\, r\, \varphi = Q R,$$

woraus entsteht

$$P = \frac{R - r\varphi}{R + r\varphi} Q, \quad \ldots\ldots \quad 2.$$

die Kraft, welche der Last Q nur ein gleichförmiges Herabsinken gestatten würde.

Bilden endlich die beiden Seilenden einen rechten Winkel, so ist der Zapfendruck

$$N = \sqrt{P^2 + Q^2},$$

oder, weil P und Q nur sehr wenig verschieden sind, annähernd

$$N = Q\sqrt{2},$$

mithin das Reibungsmoment

$$M = r\varphi\, Q\sqrt{2}$$

und die Gleichgewichtsbeziehung

$$PR \mp r\varphi\, Q\sqrt{2} = QR$$

oder

$$P = \frac{R \pm r\varphi\sqrt{2}}{R} Q = \left(1 \pm \frac{r\varphi\sqrt{2}}{R}\right) Q, \quad \ldots\ldots \quad 3.$$

worin man das obere oder untere Zeichen gelten lassen muss, jenachdem die Last Q gehoben oder vor dem Zurückgehen eben noch bewahrt werden soll.

An der losen Rolle ist der Zapfendruck unter allen Umständen gleich der Last Q, folglich das Moment der Zapfenreibung

$$M = Q r \varphi.$$

Sind nun die Seilenden vertikal, so ist das statische Moment der Last QR und das Moment der Kraft $2PR$, mithin die Bedingung des Gleichgewichtes für Aufwärtsbewegung

$$2PR = QR + Qr\varphi,$$

woraus sich ergiebt

$$P = \frac{R + r\varphi}{2R} \cdot Q. \quad \ldots\ldots \quad 4.$$

Setzt man hierin $-\varphi$ statt $+\varphi$, so entsteht

$$P = \frac{R - r\varphi}{2R} \cdot Q, \quad \ldots\ldots \quad 5.$$

die zum gleichförmigen Herablassen von Q erforderliche Kraft.

§ 114.

Übungsbeispiele.

306. Ein *9 m* hohes Wasserrad wiegt *12000 kg*. Welche Kraft P muss tangential an seiner Peripherie wirken, um das Rad in gleichförmiger Bewegung zu erhalten, wenn der Zapfenradius *8 cm* ist, der Reibungskoëffizient *0,03* beträgt und der Einfluss von P auf den Zapfendruck als verschwindend betrachtet wird?

Antwort: $P = 6{,}4\ kg$.

307. Wie gross würde sich aber diese Kraft P herausstellen, wenn man ihre Einwirkung auf den Zapfendruck berücksichtigt und annimmt, dass sie vertikal abwärts wirkt, also diejenige Richtung hat, in welcher sie den Zapfendruck am meisten verstärkt?

Antwort: Es ergiebt sich $P = 6{,}4034\ kg$, also ein von *6,4 kg* äusserst wenig verschiedener Wert.

308. Man bestimme die sekundlichen Arbeiten, welche an dem Wasserrade einerseits die Zapfenreibung konsumiert und andererseits die Kraft P an der Radperipherie produziert, wenn $n = 4$ ist.

Lösung: Für beide erhält man *12,1 mkg*.

309. Mittels eines Wellrades, für welches $R = 100\ cm$, $r' = 18\ cm$, $r = 4\ cm$, $\varphi = 0{,}06$ und $G = 150\ kg$ gegeben sind, soll eine Last von *1000 kg* gehoben werden; man bestimme die hierzu nötige Kraft, wenn dieselbe erstens vertikal abwärts und zweitens vertikal aufwärts gerichtet ist.

Resultate: Zu erstens $P = 183{,}25\ kg$ und zu zweitens $P = 182{,}32\ kg$.

310. Welches sind die Wirkungsgrade des Wellrades in diesen beiden Grenzfällen unter der Voraussetzung, dass von der Seilsteifigkeit abstrahiert wird?

Antwort: *0,982* resp. *0,987.*

311. Was ergiebt sich in Aufgabe 309 für eine Kraft, welche horizontal am Umfange des Rades wirkt?

Antwort: $P = 182{,}84\ kg.$

312. Welche Last kann mit Hilfe eines *60 kg* wiegenden Haspels, dessen Wellenhalbmesser (einschliesslich der halben Seilstärke) *12 cm* und dessen Zapfenradius *2 cm* lang sind, gehoben werden, wenn an den beiden *42 cm* langen Kurbeln jeder von zwei kräftigen Arbeitern durchschnittlich einen Normaldruck von *10 kg* ausübt und der Reibungskoëffizient zu *0,1* angenommen wird?

Antwort: Eine Last von *67,87 kg.*

313. An einer Brunnenwinde ist die Kurbel *40 cm*, der Wellendurchmesser *20 cm* und der Zapfenradius *2 cm* lang; um die Welle ist ein *2 cm* dickes Seil geschlungen, welches an dem einen Ende einen *15 kg* wiegenden leeren und am anderen Ende einen *75 kg* schweren vollen Eimer trägt, welchen mittleren Druck auf den Kurbelgriff hat man anzuwenden, wenn der Reibungskoëffizient *0,07* und das Gewicht der Winde *50 kg* ist?

Antwort: Den Druck $P = 16{,}99 \sim 17\ kg.$

314. Vermittelst einer festen Rolle soll eine Last von *100 kg* gehoben werden. Welches ist die hierzu erforderliche Kraft, wenn der Zapfenhalbmesser *1 cm*, der Rollenhalbmesser *16 cm* und der Winkel zwischen den verlängerten Seilenden 60^0 und der Reibungskoëffizient *0,08* gegeben sind?

Antwort: $P = 100{,}866\ kg.$

§ 115.

Das Bremsdynamometer.

Um die Arbeitskraft einer Betriebsmaschine genau zu erfahren, bedient man sich eines Apparates, welcher das Bremsdynamo-

meter oder der Pronysche Zaum genannt wird. Derselbe ist in Figur 131 dargestellt und besteht in der Hauptsache aus einem längeren Hebel *E A*, an welchem links zwei segmentartig ausgeschnittene Holzstücken *D D* durch die beiden Schrauben *E F* befestigt sind und an dessen rechtem Ende *A* eine Wagschale hängt.

Diesen Apparat steckt man nun so auf die vom Motor bewegte Welle *C*, dass letztere durch die Backen oder Sättel *D D* genau umschlossen wird und ein Anziehen der Schraubenmuttern *E E* eine Pressung, infolgedessen auch Reibung zwischen dem Um-

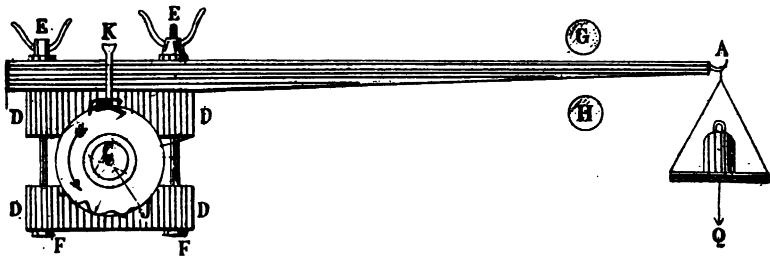


Fig. 131.

fange der Welle und den inneren Flächen der beiden Bremsbacken erzeugt; zwei feste Hindernisse *G* und *H*, welche oberhalb und unterhalb des Hebels angebracht werden, verhüten ein Umherschleudern des letzteren und gestatten seiner Bewegung einen nur geringen Spielraum.

Hat man jetzt alle Arbeitsmaschinen von der Betriebswelle getrennt und zieht die Muttern *E E* in dem Masse an, dass die Welle diejenige Anzahl *n* von Umdrehungen per Minute macht, welche sie für den gewöhnlichen Betrieb der Anlage haben muss, so ist die Nutzarbeit unserer Kraftmaschine künstlich in Reibung umgesetzt: es kommt also nur noch darauf an, diejenige mechanische Arbeit, welche durch den Reibungswiderstand *W* am Umfange der Welle *C* verbraucht wird, genau zu messen.

Zu dem Ende belastet man die in *A* aufgehängte Wagschale so lange mit Gewichten, bis der Hebelsarm *E A* zwischen *G* und *H* horizontal frei schwebt. In dem Moment, wo letztere Thatsache eingetreten ist und zugleich die Welle *C* die vorgeschriebene

Tourenzahl n hat, kann das Experiment als glücklich beendet angesehen werden; denn bezeichnen wir den Halbmesser CJ der Betriebswelle mit r, die Belastung des Punktes A mit Q und den Hebelsarm von Q in Bezug auf die Wellenachse mit l, so sind Wr, Ql die statischen Momente von W und Q in Beziehung auf C, und es ergiebt sich aus der Momentengleichung

$$Wr = Ql$$

der Reibungswiderstand

$$W = \frac{l}{r} Q.$$

Mithin ist der Arbeitsverbrauch der Reibung nach einer vollen Umdrehung der Welle

$$2 r \pi \cdot W = 2 \pi l Q,$$

also nach einer Minute

$$A = 2 \pi l n Q$$

und demnach während einer Sekunde

$$E = \frac{A}{60} = \frac{\pi}{30} l n Q,$$

das ist zugleich der Nutzeffekt der Kraftmaschine in Meterkilogrammen, sobald man nur l in Metern und Q in Kilogrammen ausdrückt. Mittels Division durch 75 entsteht

$$N = \frac{E}{75} = \frac{\pi}{2250} l n Q,$$

oder, weil

$$\frac{\pi}{2250} = 0{,}001396 \sim 0{,}0014$$

ist,

$$\mathbf{N = 0{,}0014\, l\, n\, Q}, \quad \ldots\ldots \quad 1.$$

die sekundliche Nutzarbeit der Kraftmaschine (Wasserrad, Turbine, Dampfmaschine etc.) in Pferdestärken.

Bezüglich der Anwendung von Pronys Zaum in der Praxis sei noch bemerkt:

1. Wenn die Betriebswelle C zu schwach oder nicht genau cylindrisch, resp. nicht sauber abgedreht ist, so umgiebt man sie mit einem gusseisernen Bremsringe, dessen Achse mit der Rotationsachse der Welle genau zusammen-

fällt und welcher selbstverständlich an die letztere fest angeschraubt werden muss. Liegt die Tourenzahl der Welle zwischen *15* und *30*, so macht man nach Poncelet den Durchmesser des Bremsringes bei einer sekundlichen Arbeit

von *6* bis *8* Pferdestärken *16* Centimeter,
„ *15* „ *25* „ *30* bis *40* Centimeter und
„ *40* „ *60* „ *65* „ *80* „

lang, damit der zwischen der Welle und den Bremssätteln notwendige Druck nicht zu gross wird und von einem oder zwei Menschen mit Hilfe von Schraubenschlüsseln bequem hervorgebracht werden kann.

2. Um einer zu grossen Erhitzung der sich reibenden Körper vorzubeugen, wird vermittelst des Kanales K den Reibungsflächen beständig Seifenwasser zugeführt.

3. In der Belastung Q ist nicht nur das Eigengewicht der Wagschale, sondern auch das auf den Punkt A reduzierte Eigengewicht des Bremsdynamometers einbegriffen. Wiegt nämlich der ganze Apparat G Kilogramm und ist a der kürzeste Abstand seines Schwerpunktes S von einer durch C gehenden Senkrechten, so wirkt eine Kraft P mit dem Hebelsarm l genau dasselbe wie G, wenn

$$P\,l = G\,a$$

ist. Folglich haben wir in

$$P = \frac{a}{l}\,G$$

das auf den Druckpunkt A reduzierte Eigengewicht vom Pronyschen Zaum; die Länge a kann hierbei experimentell leicht festgestellt werden, indem man den Apparat auf einer scharfen Schneide, z. B. auf einer dreikantigen Feile, so lange verschiebt, bis er frei schwebt *); denn dann liegt der Schwerpunkt S des Bremsdynamometers lotrecht über der Feilkante.

Übrigens kann man die ganze letzte Operation sparen, wenn man das Bremsdynamometer ausbalanciert, d. h. den Hebel links von C derartig belastet, dass der Schwerpunkt vertikal über der Drehachse C zu liegen kommt; denn in diesem Falle ist a und demnach auch P gleich Null.

4. Die Belastung Q kann auch ersetzt werden durch die Spannung eines Seiles, dessen Enden einerseits in A am Hebel und andererseits an einer Federwage befestigt sind. Ist dieses Seil genau lotrecht gespannt, so zeigt die Federwage direkt den Druck Q an, welcher notwendig ist, um der Reibung in jedem Augenblick das Gleichgewicht zu halten.

---

*) Noch einfacher findet man den Druck P, welchen das eigene Gewicht G des Instrumentes im Punkte A ausübt, wenn man den Sattel D lose auf eine Welle setzt und den Endpunkt A des Hebels an eine Federwage hängt; die Zugkraft an letzterer giebt P an.

5. Bei vertikal stehender Welle kann zwar das Bremsdynamometer ebenfalls zweckentsprechend benützt werden, es muss aber dann der Endpunkt A des Hebels in einer horizontalen Führung laufen, weil sonst das Eigengewicht eine Verdrehung der ganzen Bremse herbeiführen könnte. Die Zugkraft Q in A kann entweder mit einer Federwage oder auch durch ein Gewicht gemessen werden, welches an einem über eine feste Rolle geleiteten Seile hängt; selbstverständlich muss das Seilstück von A bis zur Rollenperipherie genau horizontal und ausserdem perpendikulär zum Hebel BA gerichtet sein.

6. Offenbar kann man mit dem Bremszaum für ein und dieselbe Kraftmaschine eine ganze Reihe von Versuchen anstellen, indem man den Nutzeffekt bei verschiedenen Umfangsgeschwindigkeiten der Betriebswelle bestimmt. Ein Vergleich der erhaltenen Resultate lässt dann erkennen, bei welcher Tourenzahl die Nutzarbeit am grössten ist.

§ 116.

Übungsbeispiele.

315. Um die Nutzleistung eines Wasserrades, welches in einer Minute *6* Umdrehungen machen soll, zu erfahren, setzt man auf seine Welle ein vorher ausbalanciertes Bremsdynamometer, dessen Hebelsarm *3,6 m* lang ist. Nachdem man mittels vorsichtigen Anziehens der Bremsbacken durch die Schraubenmuttern die vorgeschriebene Tourenzahl und durch allmähliches Auflegen von Gewichten auf die Wagschale den Gleichgewichtszustand des Instrumentes herbeigeführt hat, addiert man die aufgelegten Gewichtsstücke zusammen und findet *226,25 kg*. Wie gross berechnet sich hieraus der Nutzeffekt des Wasserrades in Pferdestärken?

Antwort: $N = 6{,}822\ PS.$

316. Welches ist der Wirkungsgrad des Wasserrades in voriger Aufgabe, wenn in jeder Sekunde *850* Liter Wasser zufliessen und das nutzbare Gefälle *1,5* Meter beträgt?

Antwort: $\eta = \frac{6{,}822}{17} = 0{,}401.$

317. Die Nutzarbeit einer Turbine zu berechnen, wenn bei *76* Umdrehungen in der Minute der *2,9 m* lange Hebelsarm des Bremsdynamometers auf die Federwage einen Druck von *147,5 kg* ausübt?

Resultat: *45,4 PS.*

318. Wie hoch stellt sich der Wirkungsgrad dieser Turbine, wenn das Aufschlagwasser *1,6* Kubikmeter und das Gefälle *3* Meter beträgt?

Antwort: $\eta = 0{,}71$.

319. Für das Wasserwerk der Stadt Bern wurden 1878 zwei ganz gleiche Turbinen von zusammen *230* Pferden ausgeführt (G. Meissner, „Wasserräder und Turbinen"), und garantierten die Lieferanten eine Nutzleistung von *70*%. Vor Übernahme der Motoren seitens der Stadt Bern sollten die Leistungen beider Turbinen von Sachverständigen festgestellt werden und wurden zu dem Ende zwei sorgfältige Versuche mit einem Bremsdynamometer, dessen Hebel genau *4* Meter lang war, vorgenommen.

Die erste Turbine hatte ein totales Gefälle von *1,712* Meter, das Aufschlagwasser betrug *6675* Liter und bei *100* Umdrehungen der Turbinenwelle in der Minute war eine Belastung des Hebels von *180* Kilogramm notwendig; wie hoch berechnet sich hieraus der theoretische und der Nutzeffekt in Pferdestärken?

Antwort: Ersterer zu *152,348* und letzterer zu *100,8 PS*.

320. Weil aber der Pronysche Zaum nicht direkt an der Turbinenwelle, sondern erst an einer zweiten Transmissionswelle angebracht werden konnte, so kommt zur gebremsten Leistung von *100,8 PS* noch der Arbeitskonsum der Reibung zweier konischer Räderpaare und der beiden Transmissionswellen in ihren Lagern. Um den Reibungswiderstand zu messen, wurde die Turbine gänzlich vom Wasser entleert, jede Belastung der ausbalancierten Bremse entfernt und allmählich auf das Hebelende Gewichte gelegt. Wenn nun bei *13 kg* die Transmission samt Turbine sich zu drehen anfing, wie hoch berechnet sich dann der Arbeitsverbrauch durch Reibung und mithin die effektive Leistung der Turbine?

Antwort: Die Reibungsarbeit ist bei hundert Touren pro Sekunde *7,2 PS* und folglich die Nutzarbeit der ersten Turbine *108* Pferdestärken.

321. Wie gross ist demnach der Wirkungsgrad der ersten Turbine?

Antwort: *0,7089* oder rund *71* Prozent.

322. Für die zweite Turbine war das Gefälle *1,69* Meter, die sekundliche Wassermenge *6480* Liter und bei *97,6* Umdrehungen per Minute die Hebelbelastung des Bremsapparates *179,5 kg.* Man bestimme hieraus die Totalarbeit, die Nutzarbeit und den Wirkungsgrad der Turbine, wenn der Verlust durch die Reibung der Transmission so gross wie vorhin angenommen wird.

Resultate: Totalarbeit *146* Pferde, Nutzarbeit $98 + 7{,}2 = 105{,}2$ Pferde, und der Wirkungsgrad *0,72* oder *72* Prozent.

§ 117.

Reibung am vollen ebenen Spurzapfen.

Wenn eine Wellenachse vertikal gerichtet ist, so entsteht an der kreisförmigen Basis des cylindrischen Zapfens die gewöhnliche gleitende Reibung und sind daher die in § 109 zusammengestellten Koëffizienten anzuwenden.

Was aber das statische Moment dieser Reibungsart in Bezug auf die Drehachse anbelangt, so können wir bei neuen Spurzapfen annehmen, dass der in der Richtung der Wellenachse wirkende Druck D sich gleichmässig auf die Unterstützungsfläche verteilt und dass daher auf alle Punkte der letzteren gleich grosse und parallele Kräfte wirken.

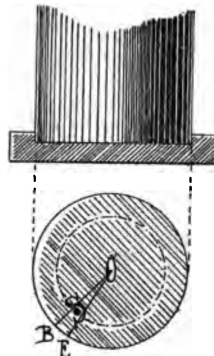


Fig. 132.

Zerlegen wir jetzt die Basis des Zapfens durch die Radien OB, $OE \cdots$ (Fig. 132) in zahllose Sektoren, welche als Dreiecke betrachtet werden können, so ist der Angriffspunkt der Resultante von allen auf die einzelnen Punkte der letzteren wirkenden Normalkräfte laut der in § 80 angeführten Definition zugleich der Schwerpunkt der homogenen Dreiecksfläche BOE; die resultierenden Drücke sämtlicher Sektoren, aus welchen die Kreisfläche besteht, wirken daher in der Peripherie eines Kreises, welcher mit dem Halbmesser $\frac{2}{3} r$ um O beschrieben wird.

Es ist folglich das Moment des Reibungswiderstandes

$$W = f D$$

in Beziehung auf die Rotationsachse:

$$\boldsymbol{M = \frac{2}{3} r f D}. \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{1.}$$

Die durch die Reibung verbrauchte Arbeit ist in vorstehendem Falle während einer Umdrehung des Zapfens

$$2 \cdot \frac{2}{3} r \pi W = \frac{4}{3} \pi f r D,$$

folglich bei der Tourenzahl n innerhalb einer Minute

$$A = \frac{4}{3} \pi f n r D,$$

mithin während einer Sekunde

$$E = \frac{A}{60} = \frac{\pi}{45} f n r D$$

und zwar in Meterkilogrammen, sobald r mit Meter und D mit Kilogrammen gemessen sind. Hieraus ergiebt sich weiter

$$N = \frac{E}{75} = \frac{\pi}{3375} f r n D$$

oder, weil $\frac{\pi}{3375} = 0{,}0009308 = \sim 0{,}000931$ ist:

$$\boldsymbol{N = 0{,}000931 f r n D}, \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{2.}$$

der durch die Reibung am stehenden Kreiszapfen verursachte Arbeitsverlust in Pferdestärken.

Hierbei ist natürlich die (sehr geringe) Reibung am Mantel des Zapfens, welche durch kleine Schwankungen der Welle und dadurch herbeigeführte seitliche Drücke verursacht werden kann, nicht mit in Betracht gezogen worden.

Fängt der neue Zapfen an zu laufen, so ist die Abnutzung desselben nach der Peripherie zu wegen der grösseren Geschwindigkeit bedeutender als nach dem Mittelpunkte zu und infolgedessen bleibt die Verteilung des Normaldruckes auf die Grundplatte nicht gleichmässig, sondern derselbe wird nach dem Umfange der kreisförmigen Basis hin allmählich geringer; hierdurch rückt aber die (kreisförmige) Angriffslinie des resultierenden Druckes mit der Zeit etwas näher an den Mittelpunkt O heran. Diese ungleichförmige Abnutzung des Zapfens

dauert aber offenbar nur so lange an, bis zwischen der Einwirkung der Geschwindigkeitsdifferenz und dem Einflusse des Druckunterschiedes ein Ausgleich stattgefunden hat; von diesem Augenblicke an erfolgt die weitere Abnutzung des Zapfens gleichmässig und man sagt: der Zapfen hat sich eingelaufen.

Durch schätzungsweise Rechnung ward gefunden und die Erfahrung hat bestätigt, dass die Druckresultante im Abstande $\frac{r}{2}$ vom Centrum O angreift; es wäre demnach für den eingelaufenen vollen Stützzapfen das Reibungsmoment

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2} r f D \quad \ldots \ldots \quad 3.$$

und der Verbrauch an Arbeit pro Minute

$$f D r \pi n,$$

folglich per Sekunde

$$\frac{\pi}{60} f r D n$$

oder in Pferden

$$\mathfrak{N} = \frac{\pi}{4500} f r n D = 0{,}000698 f r n D. \quad \ldots \quad 4.$$

Aus den Formeln 1 bis 4 können wir schliessen, dass unter sonst gleichen Umständen die Reibung an neuen Stützzapfen grösser ist als an den eingelaufenen und zwar um $33^1/_3\,\%$; denn setzen wir die Gleichungen 1 und 3, bzw. 2 und 4 ins Verhältnis, so folgt

$$M : \mathfrak{M} = N : \mathfrak{N} = 4 : 3.$$

§ 118.

Übungsbeispiele.

323. Das Gewicht einer Turbine samt Welle und darauf sitzendem Zahnrade beträgt *1800 kg*, die Stärke des Stiftes an der Basis *2,5 cm* und die Anzahl seiner Umdrehungen in der Minute *100*. Wie viel Arbeit pro Sekunde konsumiert die Reibung des Stiftes, wenn derselbe a. noch neu und b. schon eingelaufen ist, den Reibungskoëffizienten zu *0,1* angenommen?

Lösungen: a. *15,7* und b. *11,8* Meterkilogramm.

324. Bei einer anderen *2500 kg* wiegenden Turbine, welche während einer Minute *32* Umläufe macht, ist der Halbmesser des ebenflächig-kreisförmigen und bereits eingelaufenen Stiftzapfens *3 cm*, der Reibungskoëffizient *0,075*, das Aufschlagwasserquantum pro Sekunde *0,6 cbm* und das Gefälle *1,6 m*. Man bestimme den durch die Zapfenreibung verursachten Arbeitsverlust im Verhältnis zum absoluten Effekt.

Lösung: Die Reibungsarbeit beträgt *9,425 mkg*, die Totalarbeit *960 mkg* in der Sekunde, folglich die erstere nahezu *1*% der letzteren.

325. Der Läufer eines Mahlganges wiegt *900 kg* und macht *100* Umgänge in der Minute, während der stählerne und gut eingelaufene Spurzapfen des *80 kg* schweren Mühleisens *48 mm* Durchmesser hat. Wie viel Reibungsarbeit wird sekundlich aufgebraucht, wenn der Koëffizient zu *0,06* angenommen werden darf?

Antwort: *7,39* Meterkilogramm.

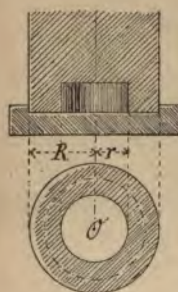


Fig. 133.

326. Man bestimme für den stehenden und ebenen Ringzapfen (Fig. 133) das Reibungsmoment M und die sekundliche Reibungsarbeit E, wenn die beiden Radien R, r der Berührungsflächen in Metern, der Zapfendruck D in Kilogrammen, die Tourenzahl n und der Koëffizient f der gewöhnlichen gleitenden Reibung gegeben sind. Der Zapfen habe sich bereits vollkommen eingelaufen, sodass man als Hebelsarm des resultierenden Zapfendruckes das arithmetische Mittel aus beiden Halbmessern R und r annehmen darf.

Resultate: Man erhält $M = \frac{R + r}{2} f D$ und

$$E = \frac{\pi f}{60} (R + r) n D \text{ Meterkilogramm.}$$

§ 119.

Zwei allgemeine Bemerkungen über Zapfenreibung.

Wir haben im vorstehenden die Reibung nur für zwei Zapfenformen bestimmt, nämlich für den cylindrischen Tragzapfen, sowie für den vollen ebenen Spurzapfen, und zwar schon

aus dem Grunde, weil die Hilfsmittel der niederen Mathematik nicht ausreichen, um die Reibung auch für andere, hie und da vorkommende Formen (z. B. konische, Kugel- und Antifriktionszapfen) zu ermitteln.

Glücklicher Weise werden aber die beiden zuerst genannten, die eigentlichen Normalzapfen, in der Praxis fast ausschliesslich angewendet und zwar mit vollem Rechte; denn wie von Reiche zeigt, verbrauchen sie unter sonst gleichen Umständen von allen Zapfenformen durch die Reibung am wenigsten mechanische Arbeit, erfordern also auch das geringste Mass von Schmiere und verursachen zugleich die unbedeutendste Materialabnutzung.

Die Formeln 2 in § 111, 2 und 4 in § 117 lassen erkennen, dass der durch die Zapfenreibung pro Sekunde verursachte Arbeitsverlust mit dem Reibungskoëffizienten f, resp. φ, dem Zapfenhalbmesser r, der Umlaufszahl n und dem Zapfendruck D gleichmässig wächst; man sollte daher, so weit es die praktischen Verhältnisse gestatten, diese vier Grössen immer so klein als möglich zu machen suchen. Hat man dies auch bezüglich der beiden letzten meistens weniger in der Hand, so kann man doch den Zapfenradius stets so gering machen, als es die Festigkeit auf die Dauer erfordert und ist auch imstande, den Reibungskoëffizienten durch reichliche stetige Zufuhr von gutem Öl oder durch geeignete Schmiermittel auf ein Minimum herabzudrücken.

Zehntes Kapitel.

Rollende Reibung, Seilsteifigkeit und Kettenreibung. Wirkungsgrade einfacher Maschinen.

§ 120.

Die rollende Reibung.

Bereits in der Einleitung zum vorigen Kapitel wurde bemerkt, dass die rollende oder wälzende Reibung auftritt, wenn ein Cylinder, welcher einen gewissen Druck gegen eine Fläche ausübt, auf letzterer, ohne zu gleiten, fortgerollt wird.

Um nun Näheres über die Grösse und Abhängigkeit dieses Widerstandes zu erfahren, setzte Coulomb Walzen aus verschiedenem Materiale und mit verschiedenen Radien auf horizontale Schienen $L\ M$ (Fig. 134) und legte über erstere eine dünne Schnur, an deren Enden Wagschalen befestigt waren.

Diese Wagschalen wurden zunächst beide mit derselben Last Q und dann die eine davon, in der Figur die rechte, noch weiter vorsichtig bis zu dem Momente belastet, wo die Walze langsam zu rollen begann und eine nahezu gleichförmige Bewegung beibehielt.*) Bezeichnet jetzt P das Übergewicht der rechten Schale und

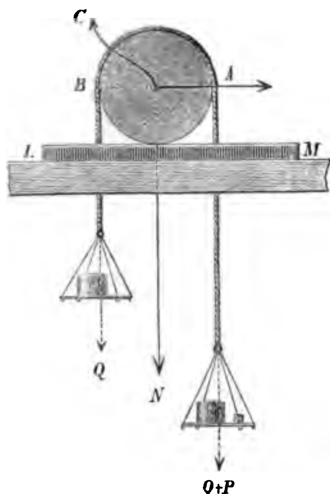


Fig. 134.

$$CA = CB = r$$

den Walzenhalbmesser, so bildet offenbar einerseits das Kraftmoment Pr ein Mass für die rollende Reibung und andererseits ist

$$N = Q + Q + P + G$$
$$= 2\,Q + P + G, \quad \cdots \quad (I.)$$

der stattfindende Normaldruck, wenn G das Eigengewicht der Walze darstellt.

Das Resultat dieser Versuche war, dass die rollende Reibung dem Normaldrucke N direkt, dagegen dem Walzenhalbmesser r umgekehrt proportional ist.

Setzt man jetzt das die rollende Reibung überwindende Kraftmoment

$$Pr = N\psi, \quad \cdots \quad (II.)$$

so ist offenbar ψ der Hebelsarm des Normaldruckes N und als solcher eine Strecke, welche mit derselben Längen-

*) Die Reibung zwischen Walze und Schnur ist unter allen Umständen hinreichend, ein Gleiten der letzteren zu verhüten. Dünn und auch möglichst biegsam muss aber die Schnur deshalb sein, damit der sogenannte Seilsteifigkeitswiderstand, welchen wir demnächst näher kennen lernen werden, vernachlässigt werden darf.

einheit wie r gemessen werden muss. Diese Grösse ψ heisst der Koëffizient der wälzenden oder rollenden Reibung und ist für die verschiedenen vorkommenden Fälle experimentell zu ermitteln. Aus (II.) folgt nämlich mit Benützung von N in (I.)

$$\psi = \frac{P r}{2 Q + G + P}, \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (III.)$$

und diese Beziehung kann auf Grund des oben beschriebenen Versuches zur Bestimmung von ψ dienen, wie folgendes Beispiel zeigen mag.

Angenommen, wir legen einen *120 kg* wiegenden gusseisernen Cylinder von *11 cm* Halbmesser auf zwei Eisenbahnschienen, belasten hierauf die beiden Wagschalen mit je *50 kg* und brauchen endlich auf der rechten Schale noch genau *1 kg* Übergewicht, um den Cylinder in langsames und nahezu gleichförmiges Rollen zu bringen.

Wir erhalten dann mit Einsetzung von

$$P = 1, \; G = 120, \; Q = 50 \, kg \text{ und } r = 11 \, cm$$

in die letzte Formel

$$\psi = \frac{1 \cdot 11}{2 \cdot 50 + 120 + 1} = \frac{11}{221},$$

oder

$$\psi = 0{,}04978 = \sim \mathbf{0{,}05 \, cm},$$

der Koëffizient der wälzenden Reibung für Gusseisen auf Eisenbahnschienen wäre demnach rund *0,05 cm*. Selbstverständlich muss bei Anwendung dieser Zahl der Hebelsarm von P ebenfalls in Centimetern in Rechnung gebracht werden.

Die in der Praxis meist gebrauchten Werte sind

für Pockholz auf Pockholz · · · · · · $\psi = 0{,}047 \, cm$,
„ Ulmenholz auf Pockholz · · · · · $\psi = 0{,}081$ „
„ Gusseisen auf Gusseisen · · · · · $\psi = 0{,}046$ „ und
„ „ „ Eisenbahnschienen · · $\psi = 0{,}051$ „

Bisher haben wir vorausgesetzt, dass der Hebelsarm der bewegenden Kraft P dem Halbmesser r der Walze gleich ist, wollen aber nunmehr von dieser speziellen Annahme absehen und den allgemeinen Fall ins Auge fassen, wo der Hebelsarm von P die beliebige Länge a besitzt. Aus der Gleichgewichtsbedingung

$$P a = \psi N$$

ergiebt sich

$$P = \frac{\psi}{a} N, \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (1).$$

worin natürlich a wiederum in Centimetern auszudrücken ist. Indess kommen für a gewöhnlich nur zwei besondere Fälle zur Geltung.

Erstens. Wirkt die zur Überwindung der rollenden Reibung notwendige Kraft am Umfange der Walze vertikal abwärts, wie in Figur 134 oder in einem Punkte der Achse, wie bei allen Wagenrädern (siehe Fig. 135) so ist $a = r$ und folglich

$$P = \frac{\psi}{r} N. \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (IV.)$$

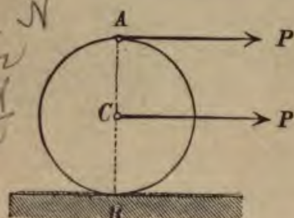


Fig. 135.

Zweitens. Wenn dagegen eine Kraft P' im höchsten Punkt A des Cylinders angreift und horizontal gerichtet ist, so hat man in 1 den Hebelsarm $a = 2\,r$ zu setzen und mithin gilt

$$P' = \frac{\psi}{2\,r} N. \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (V).$$

Anwendungsbeispiel. Ein Eisenbahnwagen wiegt samt Belastung $Q = 8400\ kg$, die Räder haben den Halbmesser $R = 50\ cm$ und die Zapfen den Radius $r = 4{,}8\ cm$. Welche Kraft P gehört dazu, um den Wagen auf horizontaler Bahn in gleichmässiger Bewegung zu erhalten, d. h. also, um die Zapfen- und die rollende Reibung zu überwinden, sobald die entsprechenden Koëffizienten $\varphi = 0{,}03$ und $\psi = 0{,}051\ cm$ gesetzt werden.

Lösung: Wir dürfen der Einfachheit halber annehmen, dass die ganze Last Q auf einem Zapfen und auf einem Rade ruht, weil es auf die Grösse der reibenden Fläche nicht ankommt. Wir denken uns sodann P in zwei Teile P_1 und P_2 derartig zerlegt, dass P_1 auf die Überwindung der rollenden und P_2 auf die Überwindung der Zapfenreibung kommt. Daraus folgt zunächst direkt nach Formel IV

$$P_1 = \frac{\psi}{R} Q = \frac{0{,}051}{50} \cdot 8400 = 8{,}568\ kg,$$

die zur Überwindung der wälzenden Reibung nötige Kraft.

Die Zapfenreibung $\varphi\, Q$ wirkt am Hebelsarm r, hat also das Moment $\varphi\, Q\, r$, während P_2 sich auf den Umfang des Rades an der Berührungsstelle überträgt, also den Hebelsarm R und das Moment $P_2\, R$ besitzt. Aus der Momentengleichung $\varphi\, Q\, r = P_2\, R$ folgt aber

$$P_2 = \frac{r}{R}\,\varphi\,Q = \frac{4{,}8}{50} \cdot 0{,}03 \cdot 8400 = 24{,}192\;kg,$$

die zur Überwindung der Zapfenreibung erforderliche Kraft.

Mithin ist

$$\boldsymbol{P} = P_1 + P_2 = 8{,}568 = 24{,}192 = \boldsymbol{32{,}76\;kg},$$

die gewünschte Kraft, welche beiden Widerständen das Gleichgewicht zu halten vermag.

Einerseits erkennen wir aus der vorstehenden Rechnung, dass unter den gegebenen Verhältnissen die Zapfenreibung bei weitem grösser als die wälzende ist, trotzdem der Hebelsarm der ersteren ($r = 4{,}8\;cm$) noch nicht den zehnten Teil vom Hebelsarm der letzteren ($R = 50\;cm$) beträgt und daher die Zapfenreibung nur mit knapp einem Zehntel ihres eigentlichen Betrags zur Geltung kommt; die Zapfenreibung an sich macht also in diesem Falle etwa das 30fache der rollenden Reibung aus.

Andererseits lässt sich weiter bilden

$$P = P_1 + P_2 = \frac{\psi}{R}\,Q + \frac{r}{R}\,\varphi\,Q = \frac{\psi + r\,\varphi}{R}\,Q = \frac{0{,}051 + 4{,}8 \cdot 0{,}03}{50}\,Q$$

oder

$$\boldsymbol{P = 0{,}0039\;Q = \sim 0{,}004\;Q = \sim \frac{Q}{250}}$$

und das will sagen: für Eisenbahnwagen beträgt der Gesamtreibungswiderstand den *250.* Teil der Last.

Die Thatsache, dass die rollende Reibung einen viel geringeren Widerstand darbietet, als die gleitende, bzw. Zapfenreibung, rechtfertigt das Bestreben, behufs Ersparnis an bewegender Kraft die Zapfenreibung in wälzende Reibung zu verwandeln. Wir können das glückliche Gelingen dieser Absicht an jedem schweren Körper, der auf untergelegten Walzen fortbewegt wird, sowie an jedem auf Rädern laufenden Fahrzeuge beobachten; aber auch direkt im Maschinenbau selbst haben wir ein gutes Beispiel an den sogenannten Friktionsrollen.

Wenn nämlich der Zapfen der Welle *W* in Figur 136 auf die Umfänge zweier gleicher hintereinander befindlicher Rollen *A* und *B* gelagert wird, so entsteht während der Bewegung zwischen den letzteren und dem ersteren wälzende Reibung. Zwar tritt auch hier, wie im obigen Anwendungsbeispiel, zugleich Reibung an den beiden Rollenzapfen auf, allein dieselbe setzt

der Wellenbewegung aus dem gleichen Grund wie dort einen verhältnismässig sehr geringen Widerstand entgegen.

Stellt man den Zapfen O (Fig. 137) der Welle $A\,C$ genau vertikal über den Mittelpunkt B einer **einzigen** Friktionsrolle $D\,E$ und verhindert ausserdem ein seitliches Ausweichen des Wellenzapfens O durch feste Backen, so ist wohl der Einfluss der Zapfenreibung in B noch etwas kleiner wie vorhin, die Welle liegt aber dann unsicherer auf.



Fig. 136.



Fig 137.

§ 121.

Übungsbeispiele.

327. Ein Cylinder aus Pockholz von *200 kg* Gewicht und *40 cm* Durchmesser liegt auf horizontaler Bahn von Pockholz, bzw. Ulmenholz; man bestimme diejenige durch die Cylinderachse gehende Horizontalkraft, welche zur Überwindung der rollenden Reibung genügend ist.

Antwort: *470*, bzw. *810* Gramm.

328. Welche Kraft ist nötig, um die **rollende** Reibung einer *42000 kg* wiegenden Lokomotive zu überwinden, wenn die Durchmesser der Räder *1,4 m* betragen?

Antwort: $P = 30{,}6\ kg$.

329. Eine Last soll auf horizontaler Bahn $M\,N$ (Fig. 138) vermittels der Walzen A, B und der Platte $C\,D$ durch die in C wirkende Horizontalkraft P fortbewegt werden; die Last incl. Platte sei mit Q, der Halbmesser der Walzen mit r, die Koëffizienten der rollenden Reibung, einerseits zwischen Walzen und Unterlage, andererseits zwischen Walze und Platte, seien mit ψ, resp. ψ'

bezeichnet. Es soll P mit und ohne Berücksichtigung des Gewichtes G beider Rollen ermittelt werden.

Auflösung: Laut Formel V. ist die Reibung zwischen Platte und Walzen, weil $N = Q$,

$$P_1 = \frac{\psi'}{2r} Q$$

und die Reibung zwischen Walze und Unterlage, weil hier $N = Q + G$,

$$P_2 = \frac{\psi}{2r}(Q + G),$$

mithin ergiebt sich

$$P = P_1 + P_2 = \frac{\psi(Q + G) + \psi' Q}{2r},$$

die Kraft bei Berücksichtigung und daraus für $G = 0$

$$P' = \frac{\psi + \psi'}{2r} Q$$

die Kraft bei Vernachlässigung des Eigengewichtes G beider Walzen.

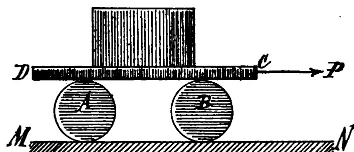


Fig. 138.

330. Die Walzen und die Platte seien aus Pockholz, die Unterlage aus Ulmenholz, das Gewicht der Last einschliesslich Platte *800 kg*, jede der beiden Walzen wiegt *20 kg* und hat *4 dcm* Durchmesser. Wie gross ist P mit und ohne Rücksicht auf die Walzengewichte?

Antwort: *2,641 kg*, bzw. *2,51 kg*.

331. Ein Körper von *240 kg* Gewicht soll mittels hölzerner Walzen von *17,2 cm* Durchmesser und einer zwischengelegten Eichenholzbohle auf gutem ebenen Steinpflaster fortgeschafft werden. Wie gross muss mindestens die Zugkraft P' sein, wenn die bezüglichen Reibungskoëffizienten *0,16* und *0,74* sind?

Antwort: *12,56 kg*.

§ 122.

Reibung bei Fuhrwerken.

Wie schon erwähnt, treten an jedem Rade eines Fuhrwerkes die rollende und die Zapfenreibung zugleich auf. Stellt Q die

Belastung nebst dem Eigengewichte des Wagens dar, sind R, r die Halbmesser des Rades, bzw. des Zapfens und, wie früher, φ und ψ die Koëffizienten beider Reibungsarten, so haben wir in Beziehung auf die Drehachse, als Moment der Zapfenreibung $\varphi\, r\, Q$ und als Moment der wälzenden Reibung $\psi \cdot \frac{Q}{R} R = \psi\, Q$. Mithin ist das Moment der horizontalen Kraft P

$$P R = \varphi\, r\, Q + \psi\, Q,$$

woraus folgt

$$P = \frac{Q}{R} (\varphi\, r + \psi) \quad \cdots\cdots \quad 1.$$

Weil r im Zähler und R im Nenner steht, so braucht auf horizontalem Wege die Horizontalkraft P, welche das Fahrzeug bewegt, um so geringer zu sein, je kleiner der Zapfenradius und je grösser der Radhalbmesser ist. Auf die Anzahl der Räder kommt es hierbei nicht an, weil der Reibungswiderstand derselbe bleibt, ob nun der Druck Q auf einer einzigen Achse lastet oder sich auf beliebig viele verteilt.

Fasst man aber beide Reibungsarten zusammen und setzt die Zugkraft P proportional der Last Q, also

$$P = \mu\, Q, \quad \cdots\cdots \quad 2.$$

so sind auf Grund der neuesten Versuche die

Koëffizienten μ der Gesamtreibung für Landfahrzeuge:

1. Strassenfuhrwerke.

Asphaltstrasse oder vorzügliches Steinpflaster	$\mu = 0{,}013$
Chaussierte Strasse in vorzüglichem Zustande	$\mu = 0{,}015$
Gutes Holzpflaster	$\mu = 0{,}018$
Gutes Steinpflaster	$\mu = 0{,}020$
Chaussierte Strasse in gutem Zustande	$\mu = 0{,}023$
Chaussierte Strasse, mit Staub bedeckt	$\mu = 0{,}028$
Geringes Steinpflaster	$\mu = 0{,}033$
Chaussierte Strasse, mit Schlamm bedeckt	$\mu = 0{,}035$
Erdwege, sehr gute	$\mu = 0{,}045$
Chaussierte Strasse von sehr geringer Beschaffenheit	$\mu = 0{,}050$
Erdwege, gute bis schlechte	$\mu = 0{,}08$ bis $0{,}16$

2. Schlitten.

Mit hölzernen Kufen auf glatten Holz- oder Steinbahnen:

ungeschmiert . . . . $\mu = 0{,}38$
geschmiert mit trockener Seife . . . . $\mu = 0{,}15$
geschmiert mit Talg . . . . $\mu = 0{,}07$

Für Holzkufen auf Schnee und Eis . . . . $\mu = 0{,}035$
Für beschlagene Kufen auf Schnee und Eis . . . . . $\mu = 0{,}02$

3. Eisenbahnzüge.

Für Eisen- und Strassenbahnwagen . . . . $\mu = 0{,}004$
Für Lokomotiven . . . . $\mu = 0{,}010$

§ 123.

Übungsbeispiele.

332. Welche Zugkraft ist notwendig, um einen Wagen, welcher samt Belastung *3200 kg* wiegt, auf chaussierter Strasse in vorzüglichem Zustande horizontal fortzubewegen?

Lösung: Hier ist laut Tabelle $\mu = 0{,}015$ zu wählen, und wir erhalten nach Formel 2

$$\boldsymbol{P} = \mu\, Q = 0{,}015 \cdot 3200 = \mathbf{48\ kg}.$$

333. Wie hoch stellt sich aber die erforderliche Kraft, sobald die Strasse *4* Prozent Steigung annimmt?

Lösung: Es kommt dann zum Reibungswiderstande $\mu\, Q$ nach § 98, Formel 3 noch die Lastkomponente $Q \cdot \frac{h}{l} = 3200 \cdot \frac{4}{100} = 128\ kg$, sodass in diesem Falle die Beförderungskraft $48 + 128 = 176\ kg$ oder, allgemeiner hergeleitet,

$$\boldsymbol{P} = \mu\, Q + \frac{h}{l}\, Q = Q\left(\mu + \frac{h}{l}\right) = 3200 \cdot 0{,}055 = \mathbf{176\ kg}$$

beträgt.

Anmerkung: Allerdings müsste bei der schiefen Ebene an Stelle des ersten Q streng genommen der Normaldruck $\frac{b}{l}\, Q$ (nach Formel 4 in § 98) treten; doch macht dies bei den nicht sehr beträchtlichen Steigungen unserer Strassen fast gar keinen Unterschied. Im vorliegenden Falle würden wir erhalten

$$P' = \frac{Q}{l}\,(b\,\mu + h), \text{ worin } b = \sqrt{(100)^2 - 4^2} = 99{,}92\ m,$$

mithin

$$\boldsymbol{P'} = 32\,(1{,}4988 + 4) = \mathbf{175{,}962\ kg}.$$

Selbst bei **wesentlich stärkeren Steigungen** wird der eigentliche Reibungswiderstand infolge des etwas kleineren Normaldrucks nur ganz wenig vermindert, wie das nächste Beispiel zeigen mag.

334. Ein sehr schlechter Erdweg steigt auf je *113 m* Länge um *15 m* an. Man soll die Kraft bestimmen, welche einen *2000 kg* schweren Lastwagen aufwärts zu ziehen imstande ist.

Lösung: Wir setzen $l = 113$, $h = 15$, demnach $b = \sqrt{l^2 - h^2} = 112$, $\mu = 0{,}16$ und $Q = 2000$. Dann ergiebt sich

$$P = Q\left(\mu + \frac{h}{l}\right) = 2000\left(0{,}16 + \frac{15}{113}\right) = \frac{66160}{113} = \mathbf{585{,}5\ kg},$$

die bewegende Kraft ohne Berücksichtigung des Einflusses, welchen die Steigung auf die Reibung ausübt und

$$P' = \frac{Q}{l}(b\mu + h) = \frac{2000}{113}(112 \cdot 0{,}16 + 15) = \frac{65840}{113} = \mathbf{582{,}7\ kg},$$

diejenige Kraft, für welche die Einwirkung der Steigung auf den Normaldruck und damit zugleich auf die Reibung berücksichtigt wurde.

Die Differenz zwischen dem angenäherten Werte P und dem genauen Werte P' beträgt selbst in diesem extremen Falle nur *2,8 kg*, mithin noch nicht $1/2$ Prozent von P oder P'. Es gilt daher bei Fuhrwerken und bei Eisenbahnfahrzeugen vollkommen gleich, ob man für die zur Überwindung der Reibung und Steigung notwendige Kraft die Näherungsformel

$$P = Q\left(\mu + \frac{h}{l}\right)$$

oder die genaue Beziehung

$$P' = \frac{Q}{l}(b\mu + h)$$

benützt.

335. Die Geleise einer Eisenbahn steigen im Verhältnis $1 : n$, d. h. auf n Meter Länge beträgt die Steigung *1* Meter. Welcher Kraft P bedarf es, um einen im ganzen Q Kilogramm wiegenden Zug in gleichförmiger Bewegung zu erhalten, wenn vom Luftwiderstand abgesehen wird?

Antwort: $P = \left(\mu + \frac{1}{n}\right) Q.$

336. Wie viel Zugkraft muss eine Lokomotive aufwenden, um eine Last von *200* Tonnen bei einer Steigung von *1 : 50* gleichmässig zu befördern?

Antwort: $P = 4800\ kg.$

337. Wie gross muss das auf den Triebrädern lastende Gewicht G der Lokomotive, das sogenannte Adhäsionsgewicht, mindestens sein, damit das Ausgleiten der Triebräder und infolgedessen das Stillstehen des ganzen Zuges ausgeschlossen ist, wenn f den Koëffizienten der gleitenden Reibung zwischen den Triebrädern und den Eisenbahnschienen bezeichnet?

Antwort: Aus $Gf = P = Q\left(\mu + \frac{1}{n}\right)$ folgt $G = \frac{Q}{f}\left(\mu + \frac{1}{n}\right)$.

338. Erfahrungsgemäss ist der Wert von f bei trocknem Wetter $0{,}33$ und bei Regen $0{,}16$. Man bestimme in beiden Fällen das geringste Adhäsionsgewicht der Lokomotive für die speziellen Zahlenangaben des Beispiels 336.

Resultate: $G_1 = 14545\ kg = \sim 14{,}55$ Tonnen und $G_2 = 30$ Tonnen.

339. Eine Lokomotive mit 20 Tonnen Adhäsionsgewicht befährt eine Strecke, auf welcher die höchste Steigung $1:125$ beträgt. Welche Maximallast darf man ihr bei jeder Witterungsart zumuten, ohne ein Ausgleiten der Triebräder besorgen zu müssen?

Resultat: $Q = \frac{G f n}{\mu n + 1} = \frac{20 \cdot 0{,}16 \cdot 125}{0{,}004 \cdot 125 + 1} = 266^2/_3$ $= \sim 267$ Tonnen.

§ 124.

Die Seilsteifigkeit oder Seilbiegung.

Wenn ein durch die Last Q gespanntes Hanf- oder Drahtseil auf eine Rolle gewickelt wird, so kann dasselbe nicht plötzlich die kreisförmige Gestalt annehmen. Es krümmt sich vielmehr nur allmählich und erhält daher in Bezug auf den Rollenumfang nicht die Lage der Tangente, sondern steht nach aussen zu davon ab, wie die Figur 139 (in stark übertriebener Weise) zur Anschauung bringt. Infolgedessen ist der Hebelsarm der Last Q etwas grösser als die Entfernung R der Seilmitte von der Drehachse.

Am ablaufenden Trumm beobachten wir die entgegengesetzte Thatsache, dass nämlich dieses eine der Rolle zugewandte Krümmung besitzt und deshalb der Hebelsarm der Kraft P ein wenig kleiner als R ist.

Die eigentliche Ursache der geschilderten Erscheinung beruht darin, dass beim Auflauf des Seiles der innere Teil zusammengedrückt, der äussere Teil aber ausgedehnt wird, wobei nicht bloss die Elastizität der einzelnen Fäden oder Drähte, sondern auch die durch gegenseitiges Verschieben der letzteren hervorgerufene Reibung überwunden werden muss. Der zur Biegung der Seile notwendige Arbeitsaufwand setzt sich demnach zusammen aus den beiden Beträgen, welche einerseits zur elastischen Formänderung und andererseits zur Überwindung der inneren Reibung notwendig sind.

Der erste Teil, die Elastizitätssteifigkeit, wird offenbar beim Ablauf wiedergewonnen, während der andere Teil, die Reibungsteifigkeit, nicht bloss verloren geht, sondern sogar beim Ablauf zum zweiten Male geleistet werden muss.

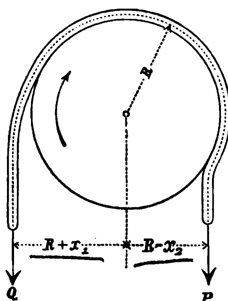


Fig. 139.

Setzen wir demnach anstatt R den Lastarm $R + x_1$ und den Kraftarm $R - x_2$, so ist die Gleichgewichtsbedingung

$$P(R - x_2) = Q\,(R + x_1),$$

woraus folgt

$$P = \frac{R + x_1}{R - x_2} \cdot Q,$$

oder, weil man mittels Division

$$(R + x_1) : (R - x_2) = 1 + \frac{x_1 + x_2}{R - x_2}$$

$$\frac{R - x_2}{x_1 + x_2}$$

erhält,

$$P = \left(1 + \frac{x_1 + x_2}{R - x_2}\right) Q.$$

Jetzt dürfen wir hierin das im Verhältnis zu R sehr kleine x_2 im Nenner vernachlässigen, sowie den Zähler $x_1 + x_2$ der

Kürze wegen mit x bezeichnen. Auf diese Weise geht die letzte Gleichung über in

$$P = \left(1 + \frac{x}{R}\right) Q$$

oder

$$\boldsymbol{P R = (R + x) Q} \quad \cdots\cdots \quad \boldsymbol{1.}$$

und wir erkennen hieraus, dass der Bewegungswiderstand der Seilsteifigkeit als Vergrösserung des Lastarmes in Rechnung gebracht werden darf. Die Bestimmung von x ist lediglich Sache des Experiments. Auf Grund der von Coulomb und Prony veröffentlichten Versuchsresultate stellte Eytelwein für lose geschlagene Hanfseile die empirische Formel

$$\boldsymbol{x = 0{,}01\, d^2} \quad \cdots\cdots \quad \boldsymbol{2.}$$

auf, worin d und x in Millimetern zu verstehen sind.

Die vorstehende Formel giebt allerdings nur einen Durchschnittswert für lose geschlagene Seile, welche hier hauptsächlich in Frage kommen und bei welchen die Versuchsresultate für x zwischen $0{,}006\, d^2$ und $0{,}012\, d^2$ schwankten. Für neue, festgeschlagene Seile erhielt man für x Werte bis zu $0{,}018\, d^2$ und darüber, während für Drahtseile ausreichende Versuchsergebnisse zur Bestimmung von x noch gar nicht vorliegen.

§ 125.

Widerstandskoëffizient und Wirkungsgrad der festen Hanfseil-Rolle.

Jetzt sind wir imstande, die Bedingung des Gleichgewichts an der festen Seilrolle unter Berücksichtigung aller Nebenhindernisse aufzustellen; denn weil in Bezug auf die Drehachse das Moment der bewegenden Kraft P gleich dem Moment von Q einschliesslich Seilbiegung vermehrt um das Zapfenreibungsmoment sein muss, so gilt allgemein

$$\boldsymbol{P R = Q (R + x) + \textit{Moment der Zapfenreibung}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{1.}$$

Nehmen wir vorerst parallele Seilenden an, so dürfen wir den Zapfendruck mit hinreichender Annäherung gleich $2\, Q$ und folglich, wenn wie früher φ den Reibungskoëffizienten und r den

Radius des Zapfens bezeichnen, das Moment der Zapfenreibung gleich $2\,Q\,\varphi\,r$ setzen. Hierdurch geht die allgemeine Beziehung 1 über in

$$P\,R = Q\,(R + x) + 2\,Q\,\varphi\,r$$

und wir erhalten mit Rücksicht auf Formel 2 des vorigen Paragraphen

$$\boldsymbol{P = Q \cdot \left(1 + 0{,}01 \cdot \frac{d^2}{R} + 2\,\varphi \cdot \frac{r}{R}\right),} \quad \cdots\cdots \quad \boldsymbol{2.}$$

worin R, r und d Millimeter zur Benennung haben müssen.

Wir sehen, dass die ganze Kraft P aus drei Bestandteilen zusammengesetzt ist und begreifen nach obigem leicht, dass der erste Teil Q zur Überwindung der Last selbst, der zweite Teil $0{,}01 \cdot \frac{d^2}{R} \cdot Q$ zur Überwindung der Seilsteifigkeit und der dritte Teil $2\,\varphi \cdot \frac{r}{R} \cdot Q$ zur Überwindung der Zapfenreibung dient.

Beispielsweise liefert die letzte Formel für $d = 20\,mm$, $R = 80\,mm$, $r = 8\,mm$ und $\varphi = 0{,}08$ die zum Heben von Q erforderliche Triebkraft

$$P = (1 + 0{,}05 + 0{,}016)\;Q = 1{,}066\;Q$$

und wir können hieraus feststellen, dass der Einfluss der Seilsteifigkeit im Betrage von $0{,}05\;Q$ (also $5\,\%$ der Last) mehr als drei mal so gross ist wie der Einfluss der Zapfenreibung im Betrage von nur $0{,}016\;Q$ (das sind bloss $1{,}6\,\%$ der Last). Da wir für d, R, r und φ Zahlenwerte gewählt hatten, welche der Wirklichkeit entsprechen, so darf mit Recht behauptet werden, dass der Seilbiegungswiderstand im allgemeinen stärker auf P einwirkt wie die Zapfenreibung. Bei Anwendung neuer festgeschlagener Seile würde sich dieser Einfluss der Seilsteifigkeit noch bedeutend, unter Umständen sogar bis auf den doppelten Betrag, erhöhen.

Setzt man zur Abkürzung

$$\boldsymbol{P = w\,Q,} \quad \cdots\cdots \quad \boldsymbol{3.}$$

so ist nach Formel 2 der Faktor

$$\boldsymbol{w = 1 + 0{,}01 \cdot \frac{d^2}{R} + 2\,\varphi \cdot \frac{r}{R}} \quad \cdots\cdots \quad \boldsymbol{4.}$$

und heisst der Widerstandskoëffizient der festen Rolle unter Voraussetzung lose geschlagener Hanfseile mit parallelen Enden.

Diese Formel für w nimmt aber eine wesentlich einfachere Gestalt an, wenn man den Umstand benützt, dass in der Praxis

die Halbmesser R und r von Rolle und Zapfen in bestimmten Verhältnissen zum Seildurchmesser d gewählt und für gewöhnlich

$$\boldsymbol{R = 10\,r = 4\,d} \quad \cdots\cdots \quad \mathbf{5.}$$

genommen zu werden pflegt; denn mit Einführung dieser Grundwerte

$$R = 4\,d \text{ und } r = 0{,}4\,d, \text{ sowie } \varphi = 0{,}08$$

in die Formel 4 ergiebt sich

$$\boldsymbol{w = 1{,}016 + 0{,}0025\,d,} \quad \cdots\cdots \quad \mathbf{6.}$$

der Widerstandskoëffizient unter obigen Festsetzungen, welcher nunmehr blos noch von der in Millimetern einzusetzenden Seildicke d abhängt und für jeden Spezialfall leicht berechnet werden kann; z. B. entsprechen den Seildurchmessern $d =$

16, 24, 32, 40 und 48 Millimeter

die Widerstandskoëffizienten $w =$

$1{,}056$; $1{,}076$; $1{,}096$; $1{,}116$ und $1{,}136$.

Dagegen würde bei Anwendung von neuen festgeschlagenen Seilen hochgegriffen

$$x = 0{,}02\,d^2$$

zu setzen sein, was den Widerstandskoëffizienten

$$\boldsymbol{w = 1{,}016 + 0{,}005\,d} \quad \cdots\cdots \quad \mathbf{7.}$$

zur Folge hätte und wir bekämen demnach für dieselben Seildurchmesser $d =$

16, 24, 32, 40 und 48 Millimeter

die bedeutend grösseren Widerstandskoëffizienten $w =$

$1{,}096$; $1{,}136$; $1{,}176$; $1{,}216$ und $1{,}256$.

Viel weniger wird w durch eine Richtungsänderung der Seilenden, welche wir bisher parallel vorausgesetzt haben, beeinflusst; denn lassen wir den Winkel α zwischen den letzteren von Null aus wachsen, so wird lediglich der Zapfendruck und damit die Zapfenreibung abnehmen, welche ohnehin den kleineren Teil der schädlichen Widerstände bildet und deren Einwirkung auf w in den Formeln 6 und 7 durch die Zahl $0{,}016$ dargestellt wird. Selbst bei $\alpha = 120^0$ ist der Zapfendruck, folglich auch die

eben genannte Zahl erst auf die Hälfte ihres Wertes herabgesunken und mithin reduziert sich in 6 und 7 die Zahl *1,016* auf *1,008*, woraus man weiter erkennt, dass sich jeder der obigen Widerstandskoëffizienten blos um *0,008* vermindert, ein kaum merklicher Unterschied, besonders wenn man bedenkt, dass die empirischen Formeln, und die darin vorkommenden Koëffizienten zur Bestimmung der Reibung und Seilsteifigkeit nur eine verhältnismässig geringe Genauigkeit darbieten können. Aus letzterem Grunde empfiehlt es sich deshalb auch, die oben für w gefundenen Zahlenwerte bei praktischer Anwendung auf die zweite Dezimale abzurunden.

Wie bei den im zweiten Kapitel betrachteten Maschinen (Wasserräder, Turbinen, Dampfmaschinen und Pumpen) versteht man auch bei den Hebemaschinen unter dem Wirkungsgrad das Verhältnis zwischen jener mechanischen Arbeit, welche die bewegende Kraft ohne Rücksicht auf die schädlichen Widerstände leisten müsste (der Nutzarbeit) und derjenigen mechanischen Arbeit, welche mit Rücksicht auf die Nebenhindernisse zum gleichförmigen Heben der Last Q erforderlich ist (der Totalarbeit), aber selbstverständlich unter der Bedingung, dass beide Arbeiten auf den nämlichen vom Angriffspunkt der Triebkraft und zwar in deren Richtung gleichförmig zurückgelegten Weg s zu beziehen sind.

Bezeichnen wir daher die erstere, welche die theoretische oder ideelle (d. h. „gedachte") Kraft heisst, mit P_0 und die andere in Wirklichkeit erforderliche und deshalb effektiv genannte Antriebskraft mit P, so ist der Wirkungsgrad oder das Güteverhältnis des betreffenden Hebezeugs

$$\eta = \frac{P_0\, s}{P\, s} = \frac{P_0}{P}, \quad \ldots\ldots \quad 8.$$

in Worten:

$$\text{Wirkungsgrad} = \frac{\text{ideelle Zugkraft}}{\text{effektive Zugkraft}}.$$

Speziell für die feste Rolle haben wir

$$P_0 = Q$$

und nach Formel 3

$$P = w\, Q,$$

mithin

$$\eta = \frac{1}{w}, \quad \ldots \ldots \quad 9.$$

woraus sich bei Geltung der Beziehungen 5 nach Formel 6

$$\eta_1 = \frac{1}{1{,}016 + 0{,}0025\, d}, \quad \ldots \ldots \quad 10.$$

der Wirkungsgrad der Leitrolle für lose geschlagene und

$$\eta_2 = \frac{1}{1{,}016 + 0{,}005\, d}, \quad \ldots \ldots \quad 11.$$

das Güteverhältnis der festen Rolle für neue, fest geschlagene Hanfseile ergiebt. Hiernach berechnet sich zur Vergleichung folgende

Tabelle

der Wirkungsgrade für die feste Seilrolle unter Annahme der Grundwerte $R = 10\,r = 4\,d$ und $\varphi = 0{,}08$.

Seildurchmesser $d =$	16	24	32	40	48	in Millimetern	
Wirkungsgrad $\eta_1 =$	0,95	0,93	0,91	0,90	0,88	für lose	geschlagene Hanfseile.
Wirkungsgrad $\eta_2 =$	0,91	0,88	0,85	0,82	0,80	für fest	

§ 126.

Wirkungsgrad der losen Hanfseil-Rolle.

Hier wirkt die Triebkraft P (Fig. 140) wieder am freien Seilende und hat den Arm $MA = R$, die Last Q hängt an der Rollenachse in M, sie erzeugt den Zapfendruck Q, folglich die Zapfenreibung $Q\varphi$ am Hebelsarm r und endlich wird im befestigten, während der Bewegung auflaufenden Seiltrum CB die Spannung S hervorgerufen, deren Hebelsarm nach § 124 mit Beachtung der Steifigkeit $R + x$ beträgt. Demnach gilt in Bezug auf den Rollenmittelpunkt M die Momentengleichung

$$PR = S(R + x) + Q\varphi r,$$

oder, weil die Seilenden **stets parallel** sind, bzw. so wenig von dieser Richtung abweichen, dass sie als parallel angesehen werden dürfen und infolgedessen

$$P + S = Q, \text{ also } S = Q - P$$

ist,

$$P R = (Q - P)(R + x) + Q \varphi r,$$

woraus nach kurzer Rechnung entsteht

$$P = \frac{R + x + \varphi r}{2 R + x} \cdot Q, \quad \ldots\ldots \quad 1.$$

die effektive Zugkraft. Da die ideelle Zugkraft

$$P_0 = \frac{Q}{2}$$

war, so ergiebt sich der Wirkungsgrad der losen Seilrolle

$$\eta = \frac{R + \frac{x}{2}}{R + x + \varphi r}, \quad \ldots\ldots \quad 2.$$

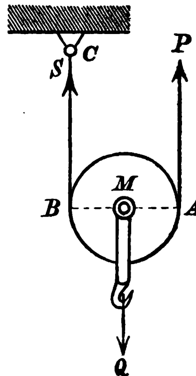


Fig. 140.

worin x den Einfluss der Seilsteifigkeit darstellt, R den Rollenhalbmesser, r den Zapfenradius und φ den Zapfenreibungskoëffizienten bezeichnet.

Nehmen wir wieder

$$R = 10\, r = 4\, d \text{ und } \varphi = 0{,}08$$

an, so erhalten wir für $x = 0{,}01\, d^2$

$$\eta_1 = \frac{4 + 0{,}005\, d}{4{,}032 + 0{,}01\, d}, \quad \ldots \ldots . \quad 3.$$

den Wirkungsgrad für lose geschlagene und für $x = 0{,}02\, d^2$

$$\eta_2 = \frac{4 + 0{,}01\, d}{4{,}032 + 0{,}02\, d}, \quad \ldots \ldots . \quad 4.$$

den Wirkungsgrad der losen Rolle für neue, festgeschlagene Hanfseile. Mit Einsetzung der obigen Werte von d in diese letzten beiden Formeln erhält man eine

Tabelle

der Wirkungsgrade der losen Seilrolle, worin $R = 10\, r = 4\, d$ und $\varphi = 0{,}08$ vorausgesetzt sind.

Seildurchmesser $d =$	16	24	32	40	48	in Millimetern	
Wirkungsgrad $\eta_1 =$	0,97	0,96	0,96	0,95	0,94	für lose	geschlagene Hanfseile.
Wirkungsgrad $\eta_2 =$	0,96	0,94	0,92	0,91	0,90	für fest	

Die Vergleichung dieser Tabelle mit derjenigen am Schluss des vorigen Paragraphen lässt erkennen, dass unter sonst gleichen Umständen der Wirkungsgrad der losen Seilrolle nicht unbeträchtlich höher ist als der Wirkungsgrad der festen Seilrolle, dass also letztere ungünstiger wirkt wie erstere.

§ 127.

Die Kettenreibung.

Wird statt des Seiles eine Kette benutzt, so entstehen an denjenigen beiden Stellen der Rolle, wo die Kette auf- und abläuft, durch gegenseitiges Verdrehen der benachbarten Glieder oder „Schaken" Reibungswiderstände, deren Wirkung ebenfalls berücksichtigt werden kann durch eine bestimmte Verlängerung des Lastarmes R, welche wir mit ξ bezeichnen wollen. Theoretische

Erörterungen, deren Resultate durch praktische Versuche bestätigt wurden, ergaben die Formel

$$\xi = f\,\delta, \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \mathbf{1.}$$

worin f den Koëffizienten der gleitenden Reibung zwischen den Schaken und δ die Ketteneisenstärke in Millimetern bedeuten. Hierbei hat man offenbar wegen der rohen Oberfläche der Kettenglieder für f einen verhältnismässig hohen Wert zu wählen und da sich $f = 0{,}3$ bei trockenen und $f = 0{,}2$ bei eingefetteten Schaken als richtig erprobt hat, so setze man

$$\xi_1 = 0{,}3\,\delta \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \mathbf{2.}$$

für trockene und

$$\xi_2 = 0{,}2\,\delta \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \mathbf{3.}$$

für eingefettete Gliederketten.

Auch den Gall'schen Gelenkketten, bei welchen δ die Stärke der Gelenkbolzenzapfen darstellt, darf die letztere Angabe zu Grunde gelegt werden; denn wenn wohl einerseits die gut geglätteten stählernen Zapfen geringere Reibung verursachen, so wird dies doch wieder dadurch aufgewogen, dass sich andererseits zugleich die Laschen in den Gelenken aneinander reiben.

§ 128.

Wirkungsgrad der Kettenrolle.

Wir betrachten zunächst wieder die feste Rolle (Fig. 141) und haben da, genau so, wie in § 125, die allgemeine Gleichgewichtsbedingung

$$P\,R = Q\,(R + \xi) + \text{Zapfenreibungsmoment},$$

worin R gleichfalls den Abstand der Rollen- oder Zapfenmitte von der Kettenmitte bezeichnet.

Für parallele Kettenenden ist dann auch hier das Moment der Zapfenreibung $2\,Q\,\varphi\,r$ und mithin, indem noch $\xi = f\,\delta$ aus No. 1 des vorigen Paragraphen eingeführt wird,

$$P\,R = Q\,(R + f\,\delta) + 2\,Q\,\varphi\,r = Q\,(R + f\,\delta + 2\,\varphi\,r)$$

oder

$$P = \left(1 + \frac{f\,\delta}{R} + 2\,\varphi \cdot \frac{r}{R}\right) \cdot Q, \quad \ldots \ldots \quad 1.$$

diejenige Kraft, welche die Last Q mittels einer festen Kettenrolle gleichförmig zu heben vermag.

Mit Einsetzung von $f = o$ und $\varphi = o$ in vorstehende Beziehung erhält man die bereits bekannte ideelle Zugkraft

$$P_0 = Q$$

und folglich weiter den Wirkungsgrad der Ketten-Leitrolle

$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{R}{R + f\,\delta + 2\,\varphi\,r}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2.$$

unter Voraussetzung paralleler Kettenenden, welche den ungünstigsten Fall für η bedingt; denn mit wachsendem Winkel zwischen P und Q nimmt der Zapfendruck und demnach auch die Zapfenreibung ab und hierdurch wird, wie schon bei der Seilrolle gezeigt wurde, η etwas, aber nur wenig grösser.



Fig. 141.

Legt man der Formel 2 die in der Praxis sehr verbreiteten Abmessungen

$$R = 10\,d \text{ und } r = 1{,}5\,\delta \quad \ldots \quad 3.$$

zu Grunde, so wird der Gütegrad der festen Kettenrolle

$$\eta = \frac{10}{10 + f + 3\,\varphi} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 4.$$

und hängt folglich nur noch von f und φ, also von der Zapfen- und Kettenreibung, aber nicht mehr von der Ketteneisenstärke δ ab, d. h. es ist dann für den Wirkungsgrad gleichgültig, wie stark die Ketten sind. Da wie früher der Zapfenreibungskoëffizient φ passend zu $0{,}08$ angenommen wird, so geht hierdurch die letzte Beziehung über in

$$\eta = \frac{10}{10{,}24 + f},$$

und wir erhalten mit Einsetzung von $f = 0,3$

$$\eta_1 = \frac{10}{10,54} = \mathbf{0,95} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{5.}$$

den Wirkungsgrad der festen Rolle für trockene, sowie mit Einsetzung von $f = 0,2$

$$\eta_2 = \frac{10}{10,44} = \mathbf{0.96} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{6.}$$

den Gütegrad der Leitrolle für eingefettete Ketten.

Bei der losen Kettenrolle gestaltet sich alles genau so, wie bei der losen Seilrolle, nur tritt an die Stelle der dort durch die Lastarmverlängerung x berücksichtigten Seilsteifigkeit hier die durch die Kettenreibung verursachte Lastarmverlängerung ξ. Setzen wir daher in der 2. Formel des 126. Paragraphen ξ statt x, so ergiebt sich das Güteverhältnis der losen Kettenrolle allgemein

$$\eta = \frac{R + \frac{\xi}{2}}{R + \xi + \varphi r} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{7.}$$

oder mit Einführung der schon benützten Festsetzungen

$$R = 10\,\delta,\ r = 1,5\,\delta,\ \xi = f\,\delta \text{ und } \varphi = 0,08$$

nach leichter Vereinfachung speziell

$$\eta = \frac{10 + 0,5\,f}{10,12 + f};$$

woraus wieder für $f = 0,3$ folgt

$$\eta_1 = \frac{10,15}{10,42} = \sim \mathbf{0,97} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{8.}$$

der Wirkungsgrad der losen Rolle bei Verwendung trockener und für $f = 0,2$

$$\eta_2 = \frac{10,1}{10,32} = \sim \mathbf{0,98} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{9.}$$

der Wirkungsgrad der losen Rolle bei Verwendung gefetteter Ketten.

Stellen wir diese für η erhaltene Resultate den sich auf die Seilrolle beziehenden Tabellenwerten in §§ 125 und 126 gegen-

über, so fällt der Vergleich durchaus zu Gunsten der Kettenrolle aus; denn selbst die höchsten Güteverhältnisse der Seilrolle (*0,95* für die feste und *0,97* für die lose Rolle bei nur *16 mm* Seilstärke) erreichen eben noch die geringsten Gütegrade der Kettenrolle. Mit wachsender Seilstärke d steigt aber der Unterschied zwischen den Wirkungsgraden beider Arten von Rollen dermassen rasch, dass unbedingt der Kettenbetrieb dem Seilbetrieb vorzuziehen ist und zwar natürlich um so mehr, je stärker die Zugorgane sein müssen. Dabei wäre für die Ketten auch noch der weitere Vorteil grösserer Dauerhaftigkeit in Anschlag zu bringen.

§ 129.

Wirkungsgrade des Haspels und des Seilrades.

An einem Haspel, wie ihn Figur 142 zur Anschauung bringt, wickelt sich das Lastseil, resp. die Lastkette zwar auf,



Fig. 142.

aber nicht wieder ab, oder falls letzteres doch geschieht, geht das ablaufende Trum leer, kommt also hier nicht weiter in Betracht. Wir tragen diesem Umstande Rechnung, indem wir den Lastarm R nicht um x, resp. ξ, sondern blos um $\frac{x}{2}$ bei Seil- und um $\frac{\xi}{2}$ bei Kettenbetrieb verlängern.

Dann haben wir, wenn die Last Q an einem d Millimeter starken Seile hängt und von der am Arme a wirkenden Kraft P gleichmässig gehoben werden soll, die allgemeine Gleichgewichtsbedingung

$$Pa = Q\left(R + \frac{x}{2}\right) + \text{Zapfenreibungsmoment},$$

oder, unter r den Zapfenradius, N den Zapfendruck und $\varphi = 0{,}08$ den Zapfenreibungskoëffizienten verstanden,

$$\boldsymbol{Pa = Q\left(R + \frac{x}{2}\right) + N\varphi r} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{1.}$$

Der Zapfendruck N schwankt bei Vernachlässigung des verhältnismässig geringen Haspelgewichts G zwischen den Grenzen $Q + P$ und $Q - P$, ist folglich im Mittel

$$N = \frac{Q + P + Q - P}{2} = Q$$

und wir erhalten die effektiv notwendige Druckkraft an der Kurbel

$$P = \frac{Q}{a}\left(R + \frac{x}{2} + \varphi r\right),$$

hieraus für $x = \varphi = o$ die ideelle Druckkraft

$$P_0 = \frac{QR}{a}$$

und mithin den Wirkungsgrad des Haspels

$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{R}{R + \frac{x}{2} + \varphi r}$$

oder

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{x}{2R} + \varphi \cdot \frac{r}{R}}, \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{2.}$$

derselbe nähert sich also um so mehr der Einheit und damit wirkt der Haspel um so günstiger, je grösser R und je kleiner x, φ und r sind.

Da man in der Regel $r = 0{,}7\,d$, $R = 4\,d$, $x = 0{,}01\,d^2$ und $\varphi = 0{,}08$ setzt, so giebt

$$\eta = \frac{1}{1{,}014 + 0{,}00125\,d} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{3.}$$

Durchschnittswerte für den Gütegrad der Hanfseiltrommel,

z. B. wird für $d = 20\ mm$

$$\eta = \frac{1}{1,039} = \sim 0,96$$

und für $d = 40\ mm$

$$\eta = \frac{1}{1,064} = \sim 0,94.$$

Dagegen pflegt man bei Ketten mit der Eisenstärke δ die Massverhältnisse

$$r = 2,5\ \delta,\ R = 10\ \delta$$

anzuwenden und weil ausserdem $\varphi = 0,08$ und für trockene Ketten $x = \xi = 0,3\ \delta$ gilt, so entsteht aus Formel 2 nach kurzer Rechnung

$$\eta = \frac{1}{1,035} = 0,966 = \sim 0,97 \quad \ldots\ldots \quad 4.$$

der Wirkungsgrad gewöhnlicher Kettentrommeln, so dass auch hier der Kettenbetrieb den Vorrang vor dem Seilbetrieb behauptet.

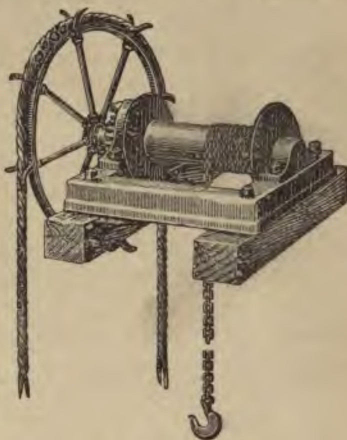


Fig. 143.

Eine geringe Abänderung erfährt die Bestimmung des Wirkungsgrades, wenn die bewegende Kraft P durch ein Rad (Haspel- oder Ziehrad genannt) mittels eines Seiles oder einer Kette auf die Windetrommel übertragen wird, wie z. B. an der aus Figur 143 ersichtlichen Speicherwinde; denn setzen wir am Haspelrand ein Seil,*) in dessen Mittellinie oder Achse die effektive Zugkraft P wirkt und an der Trommel eine Kette mit der Last Q voraus, so wird der Kraftarm a durch die Seilsteifigkeit um $\frac{x}{2}$ verkürzt, dagegen der Lastarm R durch die Kettenreibung um $\frac{\xi}{2}$ verlängert und es gilt daher allgemein

*) Das Gleiten des Seiles wird verhindert durch die am Umfange des Haspelrades angebrachten, gabelförmigen und nach innen sich verengenden Griffe, zwischen welche sich das Seil einklemmt.

$$P\left(a - \frac{x}{2}\right) = Q\left(R + \frac{\xi}{2}\right) + \varphi N r, \quad \ldots \ldots \quad \mathbf{5.}$$

eine Beziehung, worin alle Buchstaben die frühere Bedeutung besitzen und aus welcher die effektive Kraft P berechnet werden kann. Weiter ergiebt sich dann für $x = \xi = \varphi = o$ die ideelle Zugkraft

$$P_0 = \frac{Q R}{a}$$

und schliesslich das Güteverhältnis

$$\eta = \frac{P_0}{P}.$$

Wir wählen in einem besonderen Fall die Zahlenwerte

$$\delta = 8 \, mm, \; r = 20 \, mm, \; R = 80 \, mm,$$
$$a = 800 \, mm, \; Q = 400 \, kg$$

und berücksichtigen vorübergehend Alles, um die Einflüsse der verschiedenen Faktoren auf den Wirkungsgrad in ihren gegenseitigen Stärkeverhältnissen beurteilen zu lernen.

Zunächst bestimmen wir die ideelle Zugkraft am Handseil

$$P_0 = \frac{400 \cdot 80}{800} = 40 \, kg$$

und nehmen das Eigengewicht der Winde samt Kette und Seil, aber ohne Gestell, $G = 60 \, kg$ an. Dann ist der Zapfendruck

$$N = Q + G + P_0 = 400 + 60 + 40 = 500 \, kg,$$

während unter Voraussetzung einer Seilstärke $d = 40 \, mm$

$$x = 0{,}01 \, d^2 = 16 \, mm$$

und bei trockener Lastkette

$$\xi = 0{,}3 \, \delta = 2{,}4 \, mm$$

angenommen werden darf und es geht für

$$\varphi = 0{,}08$$

die obige Formel 5 über in

$$792 \, P = 32480 + 800 = 33280,$$

woraus folgt

$$P = 42{,}02 = \sim 42 \, kg,$$

sodass sich der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{40}{42} = \mathbf{0{,}952}$$

herausstellt.

Hätten wir den Einfluss von P_0 und G auf die Zapfenreibung vernachlässigt, so wäre das Moment der letzteren

$$\varphi N r = 0{,}08 \cdot 400 \cdot 20 = 640,$$

somit

$$P = \frac{33120}{792} = 41{,}82 \; kg$$

und demnach

$$\eta = \frac{40}{41{,}82} = \mathbf{0{,}956}$$

ausgefallen, wodurch festgestellt ist, dass die Einwirkung von G und P_0 auf den Wirkungsgrad unserer Speicherwinde *4* pro mille des wahren Wertes beträgt. Wollten wir ausserdem noch die Steifigkeit des Handseiles unberücksichtigt lassen, indem wir $x = o$ setzten, so würde in der vorletzten Gleichung *800* an die Stelle von *792* treten, demgemäss

$$P = \frac{33120}{800} = 41{,}4 \; kg$$

und infolgedessen

$$\eta = \frac{40}{41{,}4} = \mathbf{0{,}966}$$

werden, sodass nunmehr die Abweichung *14* pro mille ausmachen würde. Man dürfte also wohl das Eigengewicht der Speicherwinde, keineswegs aber die Wirkung der Steifigkeit des Handseiles vernachlässigen. Den immerhin noch sehr geringen Seilbiegungswiderstand und damit zugleich den obigen ungemein hohen Wirkungsgrad $\eta = 0{,}952$ verdanken wir dem sehr grossen Radhalbmesser $a = 800 \; mm$.

§ 130.

Übungsbeispiele.

340. In einer Maschinenfabrik werden bei Anfertigung von Hanfseil-Rollen die Massverhältnisse

$$R = 6\,d \text{ und } r = 0{,}3\,d$$

zu Grunde gelegt. Man entwickele die Formel für den Wirkungsgrad, wenn die Rolle fest, P parallel Q, $\varphi = 0{,}08$ ist und $x = 0{,}012\,d^2$ angenommen wird.

Resultat: $\eta = \dfrac{1}{1{,}008 + 0{,}002\,d}$.

341. Welches wären demnach die Gütegrade für *20*, *30*, *40* und *50* Millimeter dicke Seile?

Antwort: *0,954*; *0,936*; *0,919* und *0,903*.

342. Den Wirkungsgrad der losen Seilrolle unter den in der vorletzten Aufgabe gestellten Bedingungen anzugeben.

Resultat: $\eta = \frac{1 + 0{,}001\,d}{1{,}004 + 0{,}002\,d}$.

343. Man bestimme die ebenfalls den Seildurchmessern $d = 20$, 30, 40 und $50\ mm$ entsprechenden Güteverhältnisse.

Resultate: *0,977*; *0,968*; *0,959* und *0,951*.

344. Bezeichnet δ die Ketteneisenstärke, so soll unter Annahme der Grundwerte

$$R = 12\,\delta,\ r = 2\,\delta \text{ und } \varphi = 0{,}08$$

der Wirkungsgrad der festen Rolle für trockne Ketten ermittelt werden.

Resultat: *0,951*.



Fig. 144.

345. Desgleichen für die lose Kettenrolle.

Resultat: *0,975*.

346. Figur 144 stellt ein Haspelrad mit Kettenbetrieb dar, welches unter den Namen Schnellflaschenzug oder Sackwinde in den Handel gebracht und zum Heben oder Senken kleinerer Lasten von *100* bis *400 kg* benutzt wird. Das Gleiten beider Ketten wird verhütet durch Vertiefungen, welche in den Umfangsnuten sowohl des Ziehrades als der Lastrolle eingelassen sind und in welche die Schaken genau passen (vergl. Fig. 145). Als Hemmung zum plötzlichen Stillhalten der Last dienen Sperrklauen, welche zu beiden Seiten des Gehänges angeordnet sind und welche die Handkette festhalten, sobald letztere etwas seitwärts gezogen wird. Die Vorzüge dieses Hebezeugs sind Einfachheit der Konstruktion, Handlichkeit im Gebrauch, lange Lebensdauer und ein besonders hoher Nutzeffekt. Behufs Feststellung des letzteren

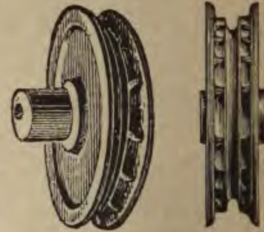


Fig. 145.

soll der Gütegrad η berechnet werden, indem man die Ketteneisenstärke mit δ bezeichnet und $r = 1{,}5\ \delta$, $R = 6\ \delta$, $a = 60\ \delta$, $\xi = 0{,}3\ \delta$ und $\varphi = 0{,}08$ setzt; der Einfluss des Eigengewichtes G und der Zugkraft P auf die Zapfenreibung kann als ganz unbedeutend vernachlässigt werden.

Andeutung zur Lösung: Mit Einführung der obigen Werte in die allgemeine Gleichgewichtsbedingung

$$P\left(a - \frac{\xi}{2}\right) = Q\left(R + \frac{\xi}{2}\right) + \varphi\ Q\ r$$

ergiebt sich

$$P = 0{,}1048\ Q$$

die effektive Zugkraft und mithin, weil $P_0 = 0{,}1\ Q$ die ideelle Zugkraft ist,

$$\eta = \mathbf{0{,}95}$$

als Wirkungsgrad.

347. Wieviel Kilogramm Zugkraft wäre demnach für jedes hundert *kg* Last erforderlich?

Antwort: Rund *10,5 kg*.

§ 131.

Allgemeines über den Wirkungsgrad.

Der Leser hatte im vorstehenden Gelegenheit zu beobachten, auf welche Art und Weise die Ermittelung des Wirkungsgrades von Rolle und Haspel erfolgt.

Zunächst mussten wir die erforderliche Triebkraft P mit Rücksicht auf die vorhandenen Bewegungswiderstände (Seilsteifigkeit, Ketten- und Zapfenreibung) berechnen. Als Grundlage hierzu dienten jene empirischen Formeln und Erfahrungskoëffizienten, welche durch zahlreiche Versuche und sorgfältige Messungen von berufenen Männern festgestellt worden sind.

Allerdings darf an den Genauigkeitsgrad dieser Formeln und der darin vorkommenden Zahlenkoëffizienten nicht eine so hohe Anforderung gestellt werden, wie etwa bei den vier Axiomen der Mechanik, deren absolute Richtigkeit über jeden Zweifel erhaben ist, nämlich schon deshalb nicht, weil die Vorgänge beim Auftreten der hier in Frage stehenden Widerstände derart zusammengesetzer und mannigfaltiger Natur sind, dass es nie gelingen wird, dieselben in das Gewand einer einfachen mathematischen Formel zu

zwängen; komplizierte Beziehungen wären aber schon zu Anwendungen auf theoretischem Gebiete ungeeignet und für den Praktiker ganz wertlos.

Die hier benützten Formeln und Koëffizienten sollen und wollen also nur eine Annäherung darbieten, wie solche zur Zeit dem Bedürfnis der Praxis genügt. Dass erstere diesen Zweck wirklich erfüllen, dafür bürgen uns einerseits die Namen derjenigen Autoren, welche die empirischen Formeln nebst Koëffizienten zuerst aufgestellt, sowie derjenigen, welche sie als befriedigend anerkannt und beibehalten haben — andererseits aber auch der Umstand, dass auf die Richtigkeit der in obiger Weise durch Rechnung erhaltenen Resultate jederzeit eine praktische Probe möglich ist, indem an ausgeführten Maschinen die effektive Triebkraft P genau nachgemessen werden kann; denn bildet man hierauf den Quotienten aus der absolut genau bestimmbaren ideellen Kraft P_0 und P, so ergiebt sich $\eta = \frac{P_0}{P}$ der Wahrheit um so näher, je sorgfältiger experimentiert wurde.

Der Hauptnutzen unserer Theorie wird jedoch darin bestehen, dem Anfänger einigermassen sichere Anhaltspunkte über die Stärke der einzelnen Bewegungswiderstände, sowohl unter sich, als auch unter verschiedenen Umständen zu gewähren.

Wenn ~~dann~~ nämlich die Rechnungen in den vorkommenden Fällen das eine mal mit, das andere mal ohne Berücksichtigung der oder jener Einwirkung durchgeführt werden, so bildet sich allmählig ein ziemlich sicheres Urteil nicht blos über die Höhe der Bewegungswiderstände überhaupt, sondern speziell auch darüber, was auf die letzteren selbst von grösserem oder geringerem Einfluss ist, was also dabei berücksichtigt werden muss oder ohne Bedenken vernachlässigt werden darf; mit anderen Worten: es ensteht das dem Praktiker so notwendige richtige Gefühl zur Unterscheidung des Wesentlichen vom Unwesentlichen. Ein Versuch, dies zu zeigen, erfolgte im letzten Absatz des § 129, wo der geringe Einfluss des Eigengewichtes G und der Zugkraft P auf die Zapfenreibung an einer Speicherwinde nachgewiesen wurde.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass es sehr empfehlenswert ist, den Wirkungsgrad immer auf zwei Dezimalen abzurunden; denn die letzteren stellen dann — als ganze Zahl angesehen — den Nutzeffekt der betreffenden Maschine in Prozenten dar, während der Unterschied von *100* den Wirkungsverlust ebenfalls in Prozenten angiebt.

Z. B. leistet eine Maschine mit dem Wirkungsgrad

$$\eta = 0{,}831 = \sim 0{,}83$$

83 % Nutzeffekt und folglich beträgt der durch die Nebenhindernisse verursachte Wirkungsverlust

$$100 - 83 = 17\ \%.$$

In dieser Form ist also der Wirkungsgrad das denkbar bequemste und übersichtlichste Mittel zur Beurteilung der Güte einer Maschine und zwar ohne jeden Nachteil, weil die zweistellige Angabe von η in den allermeisten Fällen den überhaupt erreichbaren Genauigkeitsgrad darbietet.

Elftes Kapitel.

Zusammengesetzte Maschinen.

§ 132.

Einleitung.

Aus den Definitionen in § 92 geht hervor, dass die einzelnen Teile einer zusammengesetzten Maschine wieder Maschinen sind und dass dann die letzten, nicht weiter zerlegbaren, weil nur von einem Körper dargestellten Bestandteile „einfache Maschinen oder mechanische Potenzen" genannt werden.

Da nun letztere untereinander stets so zusammenhängen, dass jede die empfangene Kraftäusserung auf die benachbarte fortpflanzt, so kann man die Gleichgewichtsbedingung irgend einer und wenn noch so komplizierten Maschine zurückführen auf die Beziehungen für das Gleichgewicht an den mechanischen Potenzen, indem man zunächst die Kräfte an den Übertragungspunkten ermittelt.

Ist nämlich P die bewegende Kraft, durch welche man mit Hilfe einer zusammengesetzten Maschine die Last Q heben, bzw. den Druck Q ausüben oder den Widerstand Q überwinden will,

so erhält man dann — entweder von P oder von Q ausgehend — mit Elimination der fortpflanzenden Zwischenkräfte leicht die gewünschte Bedingung des Gleichgewichts zwischen P und Q.

Wir wollen die Art und Weise der Ausführung im nächsten Paragraphen an zwei besonderen Fällen zeigen und dabei der grösseren Einfachheit halber einstweilen von den schädlichen Bewegungswiderständen absehen.

§ 133.

Hebelverbindungen und Räderwerke ohne Reibung.

Sind mehrere Hebel unter einander so verbunden, dass an den beiden äussersten die Kraft P_0 und die Last Q angreifen, während die Endpunkte von je zwei benachbarten durch Druck (oder Zug) aufeinander wirken, so lässt sich die Entwickelung der Gleichgewichtsbedingung leicht auf den einfachen Hebel zurückführen, wenn man bedenkt, dass das ganze Hebelsystem im Gleichgewichte sein muss, sobald es jeder einzelne Hebel ist.

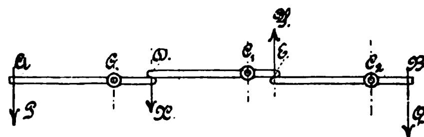


Fig. 146.

Das Hebelwerk (Fig. 146) bestehe zum Beispiel aus drei Hebeln mit den Drehpunkten C, C_1, C_2 und den Armen

$$A\,C = p,\quad C\,D = q,\quad D\,C_1 = p',\quad C_1\,E = q',\quad E\,C_2 = p'',\quad C_2\,B = q'',$$

am linken Endpunkte A greife die Kraft P_0 an, welche der in B wirksamen Last Q das Gegengewicht halten soll.

Bezeichnen wir jetzt die Drücke, welche zwischen den Enden der Hebel stattfinden und in den Mittelpunkten D, resp. E der Berührungsflächen angreifen, mit X, bzw. Y, so gelten im Gleichgewichtszustande die Beziehungen

$$P_0\,p = X\,q,$$
$$X\,p' = Y\,q',$$
$$Y\,p'' = Q\,q''.$$

Durch Multiplikation folgt

$$P_0\,X\,Y\,p\,p'\,p'' = X\,Y\,Q\,q\,q'\,q'',$$

und durch Division mit $X\,Y$

$$P_0\,p\,p'\,p'' = Q\,q\,q'\,q'',$$

die gewünschte Gleichgewichtsbedingung.

Eine besonders wichtige Anwendung des vorstehend Gesagten haben wir in den Räderwerken, bei welchen mehrere Wellenräder

derartig mit einander verbunden sind, dass von der Welle jeden Rades auf die Peripherie des folgenden Kraft übertragen wird.

Diese Kraftübertragung kann nun bei unmittelbarer Berührung der Maschinenteile entweder (unter starkem Normaldruck) durch die Reibung (Friktionsräder) oder auch durch Verzahnung (Zahnräder) bewerkstelligt werden. Im ersten Falle sind als Hebelsarme in Rechnung zu bringen die Halbmesser der Rad- und Wellenperipherie selbst, im anderen diejenigen beiden Lote, welche vom Druckpunkte zweier ineinander greifender Zähne auf die zugehörigen Drehachsen gefällt werden können. Denkt man sich aber von den Fusspunkten der genannten Lote aus zwei (sich berührende) Kreise beschrieben, so ist der zweite auf den ersten Fall zurückgeführt.

So zeigt z. B. Figur 147 eine Verbindung von vier Wellrädern mit den Drehachsen M_1, M_2, M_3 und M_4; die Radhalbmesser seien

$$M_1 A = R_1,\ M_2 A_1 = R_2,\ M_3 A_2 = R_3,\ M_4 A_3 = R_4$$

und die Radien der Wellen, resp. Getriebe

$$M_1 A_1 = r_1,\ M_2 A_2 = r_2,\ M_3 A_3 = r_3,\ M_4 A_4 = r_4,$$

in A sei die Kraft P_0 am Hebelsarme R_1 und in A_4 die Last Q am Arme r_4 wirksam.

Um die Gleichgewichtsbedingung zu erhalten, bezeichnen wir die Drücke, welche in den Punkten A_1, A_2, A_3 tangential zu den sich berührenden Kreisen wirken und wovon jeder nach § 22 einen gleich grossen Gegendruck hervorruft, mit X, Y, Z, und haben

$$P_0 R_1 = X r_1,$$
$$X R_2 = Y r_2,$$
$$Y R_3 = Z r_3,$$
$$Z R_4 = Q r_4.$$

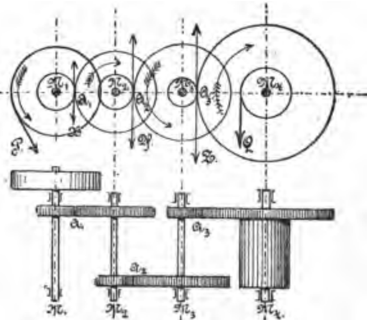


Fig. 147.

Durch Multiplikation vorstehender Gleichungen folgt aber

$$P_0 X Y Z R_1 R_2 R_3 R_4 = X Y Z Q r_1 r_2 r_3 r_4$$

und hieraus mittels Division durch $X Y Z$

$$\boldsymbol{P_0 R_1 R_2 R_3 R_4 = Q r_1 r_2 r_3 r_4}$$

oder

$$\boldsymbol{P_0 : Q = r_1 r_2 r_3 r_4 : R_1 R_2 R_3 R_4}$$

in Worten: An einem Räderwerke herrscht Gleichgewicht, wenn die Kraft (am Umfange des ersten Rades) zur Last (an der Peripherie der letzten Welle) sich verhält, wie das Produkt aller Wellenradien zum Produkte sämtlicher Radhalbmesser.

Befindet sich das Räderwerk in gleichförmiger Bewegung und bezeichnet man die Geschwindigkeiten der Punkte A, A_1, A_2, A_3, A_4 mit c, v_1, v_2, v_3, v, so hat man

$$v_1 = \frac{r_1}{R_1} c, \quad v_2 = \frac{r_2}{R_2} v_1,$$

$$v_3 = \frac{r_3}{R_3} v_2, \quad v = \frac{r_4}{R_4} v_3,$$

woraus folgt

$$v_1 v_2 v_3 v = \frac{r_1 r_2 r_3 r_4}{R_1 R_2 R_3 R_4} c v_1 v_2 v_3,$$

$$v = \frac{r_1 r_2 r_3 r_4}{R_1 R_2 R_3 R_4} c,$$

$$r_1 r_2 r_3 r_4 : R_1 R_2 R_3 R_4 = v : c,$$

oder, wenn man dies Verhältnis in die obige Proportion einsetzt,

$$P_0 : Q = v : c,$$

sodass sich, wenn von allen Bewegungshindernissen abgesehen wird, die am Räderwerke wirksamen Kräfte umgekehrt wie die Geschwindigkeiten ihrer Angriffspunkte verhalten. In anderer Form lautet dieser Satz: Die Effekte von Kraft und Last sind einander gleich; denn aus der letzten Beziehung folgt

$$P_0 c = Q v.$$

Man kann demnach auch durch irgend welche Räderverbindungen niemals einen Gewinn an mechanischer Arbeit erzielen; ihr Vorteil besteht vielmehr lediglich darin, dass man entweder mit geringer Kraft grosse Lasten zu heben vermag, wie durch Winden und Krahne, oder darin, mittels vorhandener bedeutender Kräfte sehr grosse Geschwindigkeiten zu erzeugen, wie dies beispielsweise bei Mühlen, Spinnereien etc. beobachtet werden kann; nach obigem verliert man aber dabei im ersten Falle an Geschwindigkeit, im zweiten an Kraft genau so viel, dass die letzte Formel erfüllt ist, wobei jedoch die Bewegungshindernisse noch nicht einmal in Betracht gezogen sind.

Schliesslich sei nur noch erwähnt, dass das vorstehend Gesagte selbstverständlich auch Anwendung auf Verbindungen von Riemenscheiben und Kettenrädern finden kann.

§ 134.

Übungsbeispiele.

348. Welche Last kann durch das Hebelwerk (Fig. 146) mit einer Kraft von *50* Kilogramm gehoben werden, wenn $CA = 85$,

$C\,D = 17$, $C_1\,D = 78$, $C_1\,E = 13$, $C_2\,E = 120$ und $C_2\,B = 20\,cm$ sind, ohne Rücksicht auf Reibung und Eigengewichte der Hebelkörper.

Antwort: Die Last $Q = 9000\,kg$.

349. Man bestimme die Drücke X und Y in den Punkten D und E.

Resultate: $X = 250\,kg$ und $Y = 1500\,kg$.

350. Die allgemeine Gleichgewichtsbedingung anzugeben, wenn alle drei Hebel dasselbe Gewicht G, nach links die Arme p, nach rechts die gleich langen Arme q besitzen und der Schwerpunkt jedes Hebelkörpers links im Abstande d von der Drehachse liegt.

Lösung: $P_0\,p^3 + G\,d\,(p^2 + p\,q + q^2) = Q\,q^3$.

351. Wie gross ist P, wenn $p = 100$, $q = 10$, $d = 40$, $G = 2{,}5\,kg$ und $Q = 1000\,kg$?

Antwort: $P_0 = -\,0{,}111\,kg$, es müsste also zur Herstellung des Gleichgewichtes eine Kraft von *111* Grammen in A aufwärts wirken.

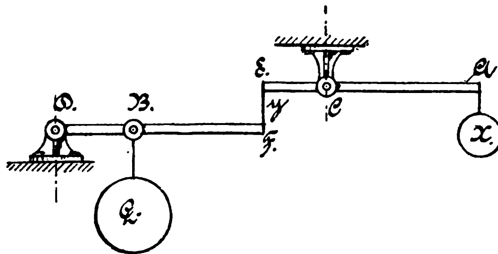


Fig. 148.

352. Wie weit müssten aber die Schwerpunkte von den Drehpunkten der drei Hebel entfernt sein, damit die Eigengewichte der letzteren allein imstande wären, das Gleichgewicht herzustellen?

Antwort: Um $d = \frac{Q}{G} \cdot \frac{q^3}{p^2 + p\,q + q^2} = 36^4/_{111}$.

353. Die Enden E und F zweier horizontal liegender und um C und D drehbarer Hebel $A\,E$ und $D\,F$ (Fig. 148) sind durch eine vertikal gerichtete Schnur $E\,F$ verbunden; in A und B wirken die Kraft X und die Last Q senkrecht abwärts. Für

welchen Wert von X besteht Gleichgewicht, wenn von den Eigengewichten der Hebel, sowie der Schnur abgesehen wird und $DB = l$, $DF = L$, $CE = r$, $CA = R$ ist?

Antwort: Für $X = \frac{l\,r}{L\,R}\,Q$.

354. Man soll die Gleichgewichtsbedingung und die Spannung y in der Schnur EF unter Berücksichtigung der Eigengewichte G und G' beider Hebel CF und AE angeben, vorausgesetzt, dass letztere durch ihre Schwerpunkte halbiert werden.

Auflösung: Das Ganze ist im Gleichgewichte, wenn

$$RX = \left(\frac{l}{L}\,Q + \frac{G}{2}\right) r - \frac{R-r}{2}\,G'$$

und die hierbei in der Schnur stattfindende Spannung

$$y = \frac{l}{L}\,Q + \frac{G}{2}.$$

355. In welchem Verhältnisse stehen an dem Räderwerke (Fig. 147) Kraft und Last, wenn die grossen Radien *120*, *150*, *100* und *110*, dagegen die Wellhalbmesser *25*, *30*, *22* und *24 cm* lang sind?

Antwort: In dem Verhältnisse *1 : 500.*

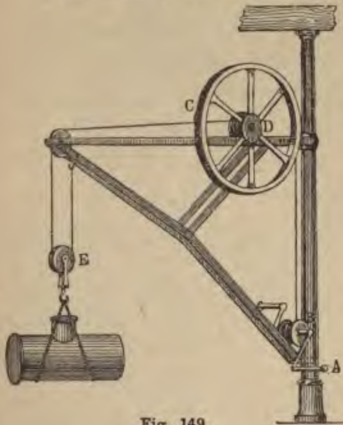


Fig. 149.

356. Wenn im vorigen Beispiel der Angriffspunkt der bewegenden Kraft die Geschwindigkeit $c = 1{,}5\,m$ besässe, mit welcher Geschwindigkeit v würde sich dann die Last heben?

Antwort: Mit der Geschwindigkeit $v = 3\,mm$.

357. An dem in Figur 149 skizzierten Seilkrahn sind die Halbmesser von Welle und Rad, Trommel und Kurbelkreis

$$r = 120\,mm,\ R = 560\,mm,\ r_1 = 70\,mm,\ R_1 = 450\,mm.$$

Man gebe das zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichts erforderliche Verhältnis zwischen Kraft und Last bei Nichtbeachtung von Reibung und Seilsteifigkeit an.

Resultat: $\frac{P_0}{Q} = \frac{r \cdot r_1}{2\,R \cdot R_1} = \frac{1}{60}$.

§ 135.

Räderwerke mit Rücksicht auf die schädlichen Widerstände.

Wollen wir die Bewegungshindernisse berücksichtigen, so geschieht dies der Praxis gegenüber auf die bequemste Art durch den Wirkungsgrad, welcher laut § 125 für jede Maschine durch Formel 8

$$\eta = \frac{P_0}{P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1.$$

unter dem Hinzufügen definiert ist, dass P_0 die ideelle, d. h. diejenige Kraft darstellt, welche ohne das Vorhandensein schädlicher Widerstände hinreichen würde, eine Last Q gleichförmig zu heben, während P die effektive Kraft bezeichnet, also jene, welche die nämliche Wirkung bei Rücksichtnahme auf alle Nebenhindernisse zu erzielen vermöchte.

Die ideelle Kraft P_0 kann immer nach dem in § 133 angegebenen Verfahren erhalten werden. Zur Bestimmung der effektiven Kraft P hat man die beiden Methoden des Experiments und der Rechnung. Das Experiment ist indessen nur bei wirklich ausgeführten Maschinen möglich und besteht in dem sorgfältigen Messen der Kraft P, welche dem am Lastträger angebrachten Gewichte Q die Wage derartig hält, dass die geringste Vermehrung von P eine Aufwärtsbewegung zur Folge hätte.

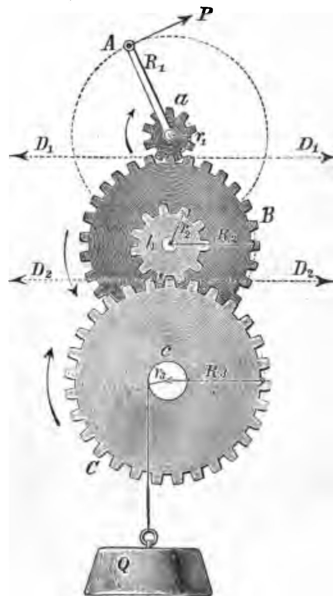


Fig. 150.

Hingegen muss der Weg der Rechnung beschritten werden, sobald es sich um die Ermittelung des Wirkungsgrades solcher Maschinen handelt, die erst entworfen werden sollen und hierbei kommt uns ein Satz zu statten, welchen wir nachstehend ableiten wollen.

In Figur 150 wirkt an der Kurbel R_1 die Kraft P und setzt das auf gleicher Achse befestigte Zahnrad a mit dem Halbmesser r_1 in Bewegung. Dieses greift in das Rad B mit dem Halbmesser R_2, auf dessen Welle wieder das Trieb b vom Radius r_2 sitzt. Endlich steht letzteres im genauen Eingriff mit dem dritten Zahnrad C, dessen Radius R_3 ist und an dessen Welle c vom Halbmesser r_3 die Last Q vermittels eines Seiles aufgewunden werden soll.

Ohne Nebenhindernisse würde die Kraft P auf den Umfang des Rades B den Druck

$$D = \frac{R_1}{r_1} P$$

übertragen, allein wegen der Zapfen- und Zahnreibung empfängt der gerade im Eingriff stehende Zahn des Rades B den kleineren Druck D_1 und wenn η_1 den Gütegrad des ersten Vorgeleges darstellt, so gilt nach 1

$$\eta_1 = \frac{D_1}{D},$$

woraus folgt

$$D_1 = \eta_1 \, D = \eta_1 \cdot \frac{R_1}{r_1} \cdot P.$$

Verstehen wir weiter unter η_2 das Güteverhältnis des zweiten Vorgeleges, so ist aus ganz gleichen Gründen der thatsächliche Druck zwischen den Zähnen des Triebes b und des Rades C

$$D_2 = \eta_2 \frac{R_2}{r_2} D_1 = \eta_1 \, \eta_2 \cdot \frac{R_1 \, R_2}{r_1 \, r_2} \cdot P$$

und ebenso, wenn η_3 den Wirkungsgrad der Seiltrommel bezeichnet, die Last

$$Q = \eta_3 \frac{R_3}{r_3} D_2 = \eta_1 \, \eta_2 \, \eta_3 \cdot \frac{R_1 \, R_2 \, R_3}{r_1 \, r_2 \, r_3} \cdot P,$$

woraus sich die effektive Kraft

$$P = \frac{r_1 \, r_2 \, r_3}{\eta_1 \, \eta_2 \, \eta_3 \, R_1 \, R_2 \, R_3} \cdot Q$$

ergiebt. Da aber nun nach § 133 die ideelle Kraft

$$P_0 = \frac{r_1 \, r_2 \, r_3}{R_1 \, R_2 \, R_3} \cdot Q$$

wäre und demnach, wenn η den Gesamtwirkungsgrad bedeutet, die effektive Kraft auch

$$P = \frac{r_1\, r_2\, r_3}{\eta\, R_1\, R_2\, R_3} \cdot Q$$

gesetzt werden darf, so erhalten wir durch Gleichsetzung der beiden letzten Werte von P

$$\frac{r_1\, r_2\, r_3}{\eta\, R_1\, R_2\, R_3} = \frac{r_1\, r_2\, r_3}{\eta_1\, \eta_2\, \eta_3\, R_1\, R_2\, R_3}$$

oder

$$\eta = \eta_1\, \eta_2\, \eta_3 \quad \ldots\ldots \quad 2.$$

und die Verallgemeinerung dieses Resultates liefert den Satz: Der Gesamtwirkungsgrad eines Triebwerkes ist gleich dem Produkte aus den Wirkungsgraden der einzelnen Getriebe.

Als Mittelwert für den Wirkungsgrad eines solchen Zahnrädervorgeleges kann *0,91* bis *0,93* angenommen werden; er ist um so günstiger, je grösser die kleine Zähnezahl z und je kleiner das Verhältnis zwischen z und der grossen Zähnezahl Z des Räderpaares sich darstellt.

Überhaupt spielt die Anzahl der Zähne auch deshalb eine wichtige Rolle, weil für zwei zusammenarbeitende Zahnräder stets statt des Radienverhältnisses $r : R$ auch das Verhältnis $z : Z$ der entsprechenden Zähnezahlen gesetzt werden darf. Um dies zu beweisen, bezeichnen wir wie in § 4 die sogenannte Teilung mit t und haben dann ebenfalls die beiden Gleichungen

$$2\, r\, \pi = t\, z \text{ und } 2\, R\, \pi = t\, Z,$$

woraus folgt

$$\frac{r}{R} = \frac{z}{Z} \quad \ldots\ldots \quad 3.$$

Demgemäss kann an der vorhin besprochenen Aufzugmaschine mit doppeltem Vorgelege die effektive Triebkraft

$$P = \frac{z_1\, z_2\, r_3}{\eta\, R_1\, Z_2\, Z_3} \cdot Q, \quad \ldots\ldots \quad 4.$$

gesetzt werden, falls z_1, z_2 die Zähnezahlen der Triebe a, b und Z_2, Z_3 die Zähnezahlen der Räder B, C vorstellen.

An dieser Anfzugmaschine finden wir z. B. nach Figur 150 durch einfaches Abzählen

$$z_1 = 9,\ z_2 = 11,\ Z_2 = 27 \text{ und } Z_3 = 29;$$

ausserdem sei $R_1 = 400\ mm$ und $r_3 = 80\ mm$. Nehmen wir ferner die Güteverhältnisse der beiden Vorgelege

$$\eta_1 = \eta_2 = 0{,}92$$

und den Gütegrad der Seiltrommel

$$\eta_3 = 0{,}95$$

an, so ist nach Formel 2 der Gesamtwirkungsgrad

$$\eta = \eta_1\ \eta_2\ \eta_3 = (0{,}92)^2 \cdot 0{,}95 = \sim 0{,}804$$

und mithin nach Formel 4 die effektive Zugkraft

$$P = \frac{9 \cdot 11 \cdot 80}{0{,}804 \cdot 400 \cdot 27 \cdot 29} \cdot Q = \sim 0{,}0315 \cdot Q;$$

zum Heben von *1000 kg* wäre also rund *32 kg* Triebkraft erforderlich.

§ 136.

Übungsbeispiele.

358. Die durch Figur 151 veranschaulichte Wandwinde mit einfachem Vorgelege hat den Trommelhalbmesser r (bis Kettenmitte gemessen), den Kurbelkreisradius R und ein Räderpaar mit den Zähnezahlen z, Z. Man soll das Verhältnis zwischen der effektiven Triebkraft P und der Spannung Q in dem noch nicht aufgewickelten Kettenende angeben, wenn die Wirkungsgrade von Vorgelege und Kettentrommel allgemein mit η_1 und η_2 bezeichnet werden.

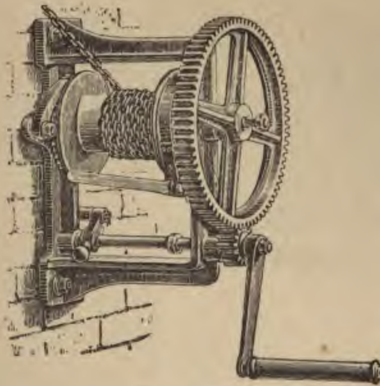


Fig. 151.

Resultat: $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{z\ r}{\eta_1\ \eta_2\ Z R}$.

359. Das vorige Beispiel für die speziellen Werte $r = 9\ cm$, $R = 42\ cm$, $z = 16$, $Z = 78$, $\eta_1 = 0{,}96$ und $\eta_2 = 0{,}97$ zu lösen.

Resultat: $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{1}{21{,}19}$; mit einem Kilogramm Kraft können demnach reichlich *21 kg* Last gehoben werden.

360. Figur 152 zeigt eine Bockwinde mit zwei Vorgelegen, welche sich nur äusserlich von der Aufzugmaschine in Fig. 150 unterscheidet, nämlich blos dadurch, dass hier Raumersparnishalber die Vorgelege enger zusammengedrängt und deshalb nicht, wie dort, vertikal übereinander angeordnet sind. Die Zähnezahlen sind für das erste Räderpaar *16* und *24*, für das zweite *6* und *80*; die Kurbel ist *375 mm* und der Trommelhalbmesser einschliesslich halber Kettenstärke *125 mm* lang. Welches ist hier der Quotient aus effektiver Kraft und zu hebender Last Q, wenn die Gütegrade der Vorgelege und der Lasttrommel *0,94*; *0,95* und *0,96* betragen?

Antwort: $\frac{P}{Q} = \frac{1}{51{,}44}$.

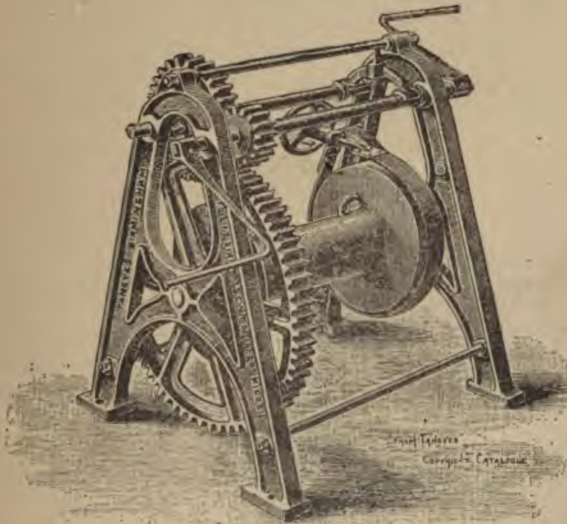


Fig. 152.

361. Man berechne für diese Bockwinde die ideelle Triebkraft P_0 und den Gesamtwirkungsgrad η.

Resultate: $P_0 = \frac{Q}{60}$ und $\eta = 0{,}8573 = \sim 0{,}86$.

362. Um letzteren experimentell zu bestimmen, hängt man an die Lastkette *300 kg*, stellt dann den Kurbelarm genau horizontal und befestigt am Kurbelgriff eine Wagschale, welche

vorher gewogen wurde. Hierauf belastet man letztere allmählig und vorsichtig so lange, bis die Last sich langsam zu heben beginnt, womit der Versuch beendigt ist. Angenommen, die Belastung einschl. Wagschalengewicht war *5,81 kg*, wie hoch ermittelt sich hieraus der Gesamtwirkungsgrad der Winde?

Antwort: $\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{5}{5,81} = \sim 0,86.$

§ 137.

Differentialwelle.

Mit dem in § 96 beschriebenen und durch Figur 116 veranschaulichten Haspel kann die bestimmte Kraft *P* eine um so grössere Last *Q* heben, je länger der Kurbelarm und je kürzer der Wellendurchmesser genommen wird. Der erstere muss sich aber nach der menschlichen Körpergrösse richten und weil die Tragfähigkeit der Welle zugleich mit ihrem Durchmesser abnimmt, so darf man bezüglich des letzteren nicht unter eine gewisse Grenze herabgehen.

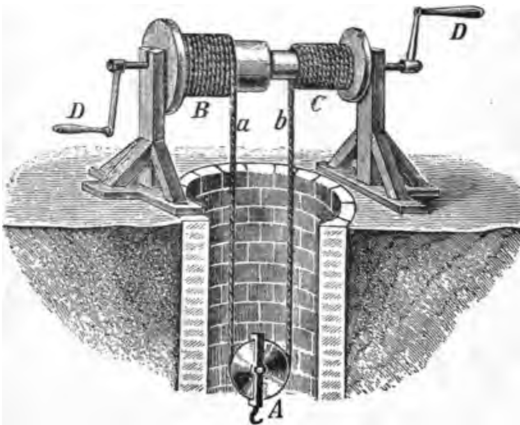


Fig. 153.

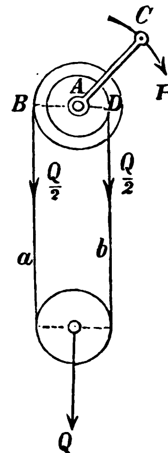


Fig. 154.

Um aber doch den Zweck zu erreichen, bedient man sich einer Maschine, der sogenannten Differentialwelle (Fig. 153), bei welcher eine (oder zwei) Kurbeln von der Länge $A\,C = l$ (Fig. 154)

auf zwei fest verbundene Wellen mit gemeinschaftlicher Drehachse aber verschiedenen Halbmessern R und r wirken. Um die letzteren sind nämlich die beiden Enden eines Seiles, welches eine lose Rolle umfasst, in entgegengesetztem Sinne so aufgewickelt, dass die beiden Stücke a und b möglichst parallel sind und es auch während der Bewegung bleiben.

Dann verursacht die am Haken der Rolle befestigte Last Q bei Vernachlässigung der Nebenhindernisse im Seile eine Spannung $\frac{Q}{2}$, die Spannung im Seilstück b und die Kraft P_0 an der Kurbel CA drehen aufwärts, dagegen die Spannung $\frac{Q}{2}$ im Seilstück a abwärts und mithin ist die Gleichgewichtsbedingung

$$P_0\, l + \frac{Q}{2}\, r - \frac{Q}{2}\, R = o,$$

woraus folgt

$$\boldsymbol{P_0 = \frac{R - r}{2\, l} \cdot Q, \quad \cdots\cdots \quad 1.}$$

die ideelle Kraft, welche an der Differentialwelle die Last Q im Gleichgewicht zu halten vermag.

Man sieht, dass diese Hebevorrichtung ohne Berücksichtigung der Seilsteifigkeit und der Reibung genau so wie ein Haspel mit dem Wellenradius $\frac{R - r}{2}$ wirkt und man hat dabei den Vorteil, R und r nach Gutdünken ohne die eingangs erwähnte Beschränkung wählen zu können. Allein dem gegenüber ist einerseits zu bedenken, dass sich die Last bei jeder vollen Kurbeldrehung nur um die Differenz beider Trommelumfänge, d. h. sehr wenig hebt, dass also viel Seil und demzufolge eine sehr lange Trommel dazu gehört, um nur eine mässige Hubhöhe zu erzielen und dann sind gerade bei der Differentialwinde die schädlichen Widerstände überraschend gross, da für die am häufigsten vorkommenden Fällen der Gesamtwirkungsgrad im Mittel

$$\eta = \boldsymbol{0{,}5} \quad \cdots\cdots \quad \boldsymbol{2.}$$

gesetzt zu werden pflegt.

Wegen der grossen Einfachheit dieser Maschine sollte man den so geringen Gütegrad $\frac{1}{2}$ kaum vermuthen und wir wollen uns deshalb über die Stichhaltigkeit vorstehender Angabe Aufklärung verschaffen, indem wir das Güteverhältnis η der Differentialwinde unter Annahme besonderer, aber normaler Abmessungen berechnen.

Setzen wir z. B. die mittlere Stärke $d = 32\,mm$ eines lose geschlagenen Seiles voraus. so wäre nach § 125 der Wirkungsgrad der losen Rolle A (Fig. 153)

$$\eta_1 = 0.91$$

und folglich, wenn wir die kleinere Spannung im auflaufenden Trum b mit S_2 bezeichnen, die grössere Spannung im ablaufenden Trum a

$$S_1 = \frac{S_2}{\eta_1},$$

woraus entsteht

$$S_2 = \eta_1\, S_1 = 0.91\, S_1.$$

Da nun andererseits

$$S_1 + S_2 = Q$$

sein muss, so ergiebt sich weiter

$$S_1 + 0{,}91\, S_1 = 1{,}91\, S_1 = Q$$

oder

$$\boldsymbol{S_1 = \frac{Q}{1{,}91} = \sim 0{,}5235\, Q}$$

und

$$\boldsymbol{S_2 = Q - S_1 = \sim 0{,}4765\, Q.}$$

An der Trommel wickelt sich aber, während Q steigt, das Seilstück a auf, dagegen das Seilstück b ab und wir haben daher, unter r_1 den Halbmesser des Kurbelzapfens und unter φ den zugehörigen Reibungskoëffizienten verstanden, die Gleichgewichtsbedingung

$$P\, l - S_1 \left(R + \frac{x}{2}\right) + S_2 \left(r - \frac{x}{2}\right) - Q\, \varphi\, r_1 = o,$$

worin wir gebräuchliche Spezialwerte

$$R = 150\,mm,\ r = 125\,mm,\ r_1 = 20\,mm$$

und $\varphi = 0{,}08$ einführen wollen.

Nun ist nach § 124, Formel 2

$$x = 0{,}01\, d^2 = 0{,}01 \cdot (32)^2 = 10{,}24\,mm$$

oder

$$\frac{x}{2} = \sim 5\,mm$$

und hierdurch geht die obige allgemeine Gleichgewichtsbedingung über in

$$P\, l = 0{,}5235\, Q \cdot 155 - 0{,}4765\, Q \cdot 120 + Q \cdot 0{,}08 \cdot 20$$
$$= Q\,(81{,}1425 - 57{,}18 + 1{,}6) = 25{,}5625\, Q.$$

Wir erhalten daraus die effektive Triebkraft

$$P = 25{,}5625 \cdot \frac{Q}{l}$$

und weil die ideelle Triebkraft laut Formel 1

$$P_0 = \frac{R - r}{2} \cdot \frac{Q}{l} = 12{,}5 \cdot \frac{Q}{l}$$

ist, so stellt sich der Wirkungsgrad unserer Differentialwinde

$$\eta = \frac{12{,}5}{25{,}5625} = \mathbf{0{,}489},$$

demnach sogar noch etwas geringer als *0,5* heraus.

Dem mit Überlegung rechnenden Leser wird nicht entgangen sein, dass bei denselben Reibungs- und Seilbiegungswiderständen der Gütegrad η um so niedriger ausfallen muss, je kleiner die Differenz $R - r$ der beiden Trommelhalbmesser ist.

Überhaupt besitzt gerade der Wirkungsgrad $\frac{1}{2}$ für die Hebezeuge besondere Bedeutung; denn in diesem Falle darf man sich die effektive Triebkraft P in zwei gleiche Teile zerlegt denken, wovon der eine alle schädlichen Widerstände überwindet und der andere die Last Q gleichmässig hebt: es ist also bei dem Gütegrad *0,5* die Wirkung aller Nebenhindernisse der Wirkung von Q gleich oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Momentensumme der ersteren stimmt überein mit dem Moment der letzteren.

Wenn es sich jetzt darum handelt, die Last herabzulassen, so sind die Bewegungshindernisse gerade imstande, der Last Q genau das Gegengewicht zu halten, weil, wie schon früher festgestellt wurde, die Widerstandskräfte jeder beabsichtigten Bewegung entgegen wirken.

Hat also irgend eine Hebmaschine das Güteverhältnis $\frac{1}{2}$, so reichen die schädlichen Widerstände eben aus, um die Last zu halten, bzw. ein gleichförmiges Senken derselben zu gestatten; bei noch geringerem Wirkungsgrade als *0,5* wäre sogar eine abwärts ziehende Kraft zum Senken der Last erforderlich.

Beidemale befindet sich die Maschine in einem Zustande, welchen man mit dem technischen Ausdruck der „Selbst-

hemmung“ zu bezeichnen pflegt und wir haben demnach gefunden, dass jede Hebevorrichtung, deren Wirkungsgrad gleich oder kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, Selbsthemmung besitzt, können aber auch umgekehrt daraus schliessen, dass jede solche sich selbst hemmende Maschine nur einen geringen, nämlich günstigsten Falls *50* Prozent Nutzeffekt leisten kann.

Die Selbsthemmung als solche darf daher niemals für eine gute Eigenschaft der betreffenden Maschine gelten, weil sie immer mit einem Wirkungsverlust von über *50* Prozent verbunden ist und sie sollte daher nur in jenen Fällen ohne Bedenken mit in den Kauf genommen werden, wo der erwähnte Übelstand durch andere Vorteile aufgewogen wird oder wo es überhaupt auf mehr oder weniger Kraftverbrauch gar nicht ankommt.

§ 138.

Übungsbeispiele.

363. An einer Differentialwelle sind die Radien $R = 8\ cm$, $r = 6\ cm$ und die Länge des Kurbelarmes beträgt *36 cm*; welche Last können zwei Arbeiter empor winden, wenn jeder mit *20 kg* auf den Kurbelgriff drückt und der Gesamtwirkungsgrad dieser Maschine gleich *0,5* angenommen wird?

Antwort: Die Last $Q = 720\ kg$.

364. Mittels einer Differentialwelle vom Wirkungsgrad *0,4* sollen *1000 kg* gehoben werden; der Kurbelradius betrage *42 cm* und die Wellendurchmesser *24*, bzw. *21 cm*. Wie gross ist die nötige Hubkraft?

Antwort: $P = 44{,}643\ kg$.

365. Mit einer Differentialwinde, an welcher $r = 122\ mm$, $R = 148\ mm$ und $l = 390\ mm$, kann durch die Kraft $P = 60\ kg$ die Last $Q = 900\ kg$ gehoben werden. Man ermittle hieraus den Gütegrad dieses Hebezeugs.

Resultat: $\eta = \frac{R - r}{2\,l} \cdot \frac{Q}{P} = 0{,}5.$

§ 139.

Der gemeine Flaschenzug.

Auch die zweckmässige Vereinigung loser und fester Rollen durch ein einziges Seil oder mehrere Seilstücke zu zusammenhängenden Systemen liefert mehrere zum Heben schwerer Lasten geeignete Maschinen. Die Gleichgewichtsbedingung für eine solche Rollenverbindung zunächst ohne Rücksicht auf Zapfenreibung und Seilsteifigkeit wird in jedem speziellen Falle leicht aufzufinden sein, wenn man beachtet: erstens, dass jede einzelne Rolle für sich im Gleichgewichte sein muss und zweitens, dass bei Vernachlässigung von Reibung und Seilsteifigkeit ein in sich zusammenhängendes Seilstück, resp. Kette, überall gleich stark gespannt ist.

So besteht z. B. der gemeine oder Faktorenflaschenzug (Fig. 155) aus einer beliebigen Anzahl von Rollen, welche in zwei Gehäusen (Kloben oder Flaschen) angebracht sind und über welche ein Seil läuft. Das eine Seilende ist an einem der beiden Kloben befestigt, am andern wirkt die Kraft P; die untere Flasche A ist beweglich und trägt die Last, die obere Flasche B ist befestigt.

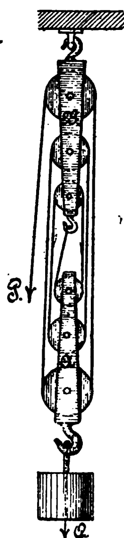


Fig. 155.

Beträgt nun die Anzahl aller Rollen in beiden Flaschen n, so wäre die für das Gleichgewicht nötige ideelle Kraft

$$P_0 = \frac{Q}{n}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1.$$

denn weil die Last Q an genau ebenso vielen Seilstücken hängt als Rollen vorhanden sind, und weil die Spannung in allen Teilen des Seiles dieselbe, nämlich $\frac{Q}{n}$ ist, so muss auch die Kraft P gleich $\frac{Q}{n}$ sein, ganz gleichgiltig, ob in der unteren Flasche A ebensoviel Rollen sind als in der oberen aber eine weniger. Letzteren Falls, wo der Flaschenzug unsymmetrisch heisst, muss nur das innere Seilende an dem beweglichen Gehäuse festgemacht sein.

Die zur Aufwärtsbewegung von Q mit Rücksicht auf die schädlichen Widerstände findet sich wieder

$$P = \frac{P_0}{\eta} = \frac{Q}{n\,\eta}, \quad \ldots\ldots \quad 2.$$

worin η den Wirkungsgrad des Faktorenflaschenzuges darstellt, welcher der Hauptsache nach von der Rollenzahl n und der Beschaffenheit, bzw. Stärke d des Zugorgans abhängt. Mittelwerte für den Wirkungsgrad des gemeinen Flaschenzugs sind in nachfolgender kleinen Tabelle zusammengestellt, woraus zugleich ersichtlich wird, dass η mit wachsender Rollenzahl n, sowie für Hanfseile mit wachsendem Durchmesser d abnimmt.

Rollenzahl n =			2	3	4	5	6	7	8
für lose geschlagene Hanfseile	$d = 20$	$\eta =$	0,91	0,89	0,87	0,84	0,82	0,79	0,76
	$d = 30$	$\eta =$	0,88	0,84	0,81	0,78	0,75	0,71	0,68
	$d = 40$	$\eta =$	0,84	0,81	0,76	0,72	0,68	0,64	0,60
	$d = 50$	$\eta =$	0,81	0,76	0,72	0,68	0,63	0,60	0,56
für Ketten	geschmiert	$\eta =$	0,91	0,92	0,90	0,88	0,86	0,85	0,83
	trocken	$\eta =$	0,93	0,90	0,88	0,86	0,84	0,82	0,80

Auch bemerkt man, dass bei Kettenbetrieb die Wirkungsgrade des gemeinen Flaschenzuges ungleich höher sind und mit steigender Rollenzahl n weniger rasch abnehmen als bei Hanfseilbetrieb, so dass der erstere bei weitem dem letzteren vorzuziehen ist, besonders da auch noch die grössere Dauerhaftigkeit der Ketten in Anschlag gebracht werden muss.

Überhaupt ist der Faktorenflaschenzug ein sehr verbreitetes und beliebtes Hebezeug wegen seiner Einfachheit und Handlichkeit, ferner, weil er überall leicht angebracht und das freie Seilende durch eine Leitrolle nach jeder beliebigen Richtung hingelenkt und durch Menschenhände oder Tierkräfte bequem gezogen werden kann.

Allerdings findet auf der anderen Seite das Übersetzungsverhältnis zwischen Kraft und Last eine sehr baldige Grenze in der kleinen Rollenzahl, welche mit Vorteil noch anwendbar ist;

denn man darf kaum über $n = 8$ hinausgehen, weil sonst der schädliche Widerstand zu gross und das Zugorgan zu lang wird, wohl auch die einzelnen Stücke des letzteren einander berühren und sich gegenseitig reiben.

§ 140.

Der Potenzflaschenzug.

Diese Hebemaschine, deren Einrichtung durch die Figur 156 veranschaulicht ist, besteht aus einer festen und mehreren beweglichen Rollen; jede der letzteren wird von einem besonderen Seilstücke umfasst, dessen linkes Ende befestigt ist und dessen rechtes Ende am Haken der nächst höheren Rolle hängt; die Last Q wirkt an der untersten losen, die Kraft P an der festen Rolle.

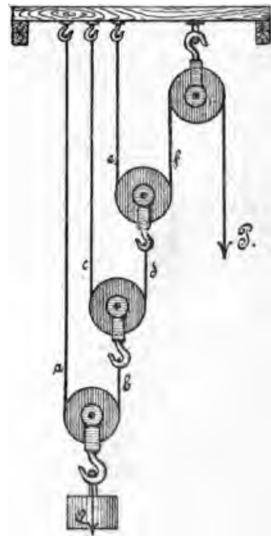


Fig. 156.

Laufen nun alle Seilstücke zu einander parallel, so ist ohne Rücksicht auf Bewegungshindernisse die Spannung in den beiden Seilenden der ersten (untersten) Rolle, also in b

$$\frac{1}{2}\,Q,$$

folglich die Spannung in den beiden Seilenden der zweiten losen Rolle, in d

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,Q = \frac{1}{2^2}\,Q,$$

mithin die Spannung in den Seilenden der dritten Rolle, in f

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}\,Q = \frac{1}{2^3}Q$$

u. s. w., u. s. w., demnach in den Seilenden der letzten, n^{ten} losen Rolle

$$\frac{1}{2^n}\,Q.$$

Diese Spannung pflanzt sich aber durch das letzte Seilstück über die feste Rolle fort und wird aufgehoben durch die ihr gleiche Kraft P_0; es wäre daher

$$P_0 = \frac{1}{2^n} Q \quad \cdots\cdots \quad 1.$$

die Bedingung des Gleichgewichtes für einen Potenzflaschenzug mit n losen Rollen ohne Beachtung von Zapfenreibung und Seilsteifigkeit.

Wollen wir aber diese schädlichen Widerstände berücksichtigen, so bezeichnen wir die Güteverhältnisse der n losen Rollen von der untersten bis zur obersten der Reihe nach mit $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \cdots \eta_n$ und das Güteverhältnis der einzigen festen Rolle mit η: dann ist in Wirklichkeit die Spannung im Seilstück b

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{\eta_1},$$

folglich im Seilstück d

$$\frac{1}{2^2} \cdot \frac{Q}{\eta_1 \cdot \eta_2},$$

dann weiter im Seilstück f

$$\frac{1}{2^3} \cdot \frac{Q}{\eta_1, \eta \cdot {}_2, \cdot \eta_3},$$

und so fort, also im Seilstück zwischen der letzten (obersten) losen und der festen Rolle

$$\frac{1}{2^n} \cdot \frac{Q}{\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdots \eta_n}$$

und mithin ergiebt sich die zum Aufwinden der Last Q effektiv notwendige Kraft

$$P = \frac{Q}{\eta_1 \, \eta_2 \, \eta_3 \cdots \eta_n \cdot 2^n \cdot \eta} \quad \cdots\cdots\cdots \quad 2.$$

Gewöhnlich werden gleich grosse Rollen und gleich starke Seile, bzw. Ketten verwendet; dann ist

$$\eta_2 = \eta_3 = \cdots = \eta_n = \eta_1$$

und damit spezialisiert sich die letzte Formel in

$$P = \frac{Q}{(2\,\eta_1)^n \cdot \eta} \quad \cdots\cdots\cdots \quad 3.$$

Es seien z. B. 5 lose Rollen vorhanden, wir nehmen an, diese, sowie die feste Rolle seien in den §§ 125, 126 erwähnten Abmessungen kon-

struiert und setzen endlich lose geschlagene Hanfseile von *40 mm* Dicke voraus. Dann haben wir

$$\eta_1 = 0{,}95 \text{ und } \eta = 0{,}90$$

zu setzen, sodass nach letzter Formel

$$P = \frac{Q}{(1{,}9)^5 \cdot 0{,}9} = 0{,}04488\, Q = \sim 0{,}045\, Q$$

wird und demnach mit *45 kg* Kraft *1000 kg* Last gehoben werden könnten. Noch günstiger gestaltet sich das Verhältnis zwischen P und Q bei Kettenbetrieb; denn selbst unter Voraussetzung trockener Ketten wäre nach § 128

$$\eta_1 = 0{,}97 \text{ und } \eta = 0{,}95$$

also

$$P = \frac{Q}{(1{,}94)^5 \cdot 0{,}95} = 0{,}03831\, Q = \sim 0{,}038\, Q.$$

Hier könnten die *1000 kg* schon mit *38 kg* gehoben werden.

§ 141.

Der Differentialflaschenzug.

Zur Hebung schwerer Lasten durch Menschenhand eignet sich besonders auch der Differentialflaschenzug, bei welchem die am Ende des § 139 erwähnten Übelstände des Faktorenflaschenzugs der Hauptsache nach vermieden sind. Derselbe besteht aus zwei auf gleicher Achse sitzenden und fest verbundenen (gewöhnlich in einem Stück gegossenen) Rollen, welche an ihren Umfängen in gleichen Abständen mit Zähnen versehen sind und deren Radien $OA = OC = R$, $OB = r$ (Fig. 157) sich nur wenig von einander unterscheiden. Um diese beiden Rollen (Kettenscheiben) ist eine endlose Kette, deren ebenfalls gleich langen Glieder genau in jene Zähne eingreifen, so gelegt, dass zwei herabhängende Schleifen entstehen. Die Schleife $ADFEB$ trägt eine gewöhnliche Rolle mit der Last Q, während die hebende Kraft P_0 in demjenigen Teile der anderen Schleife wirkt, welcher von der grösseren Kettenscheibe herabfällt.

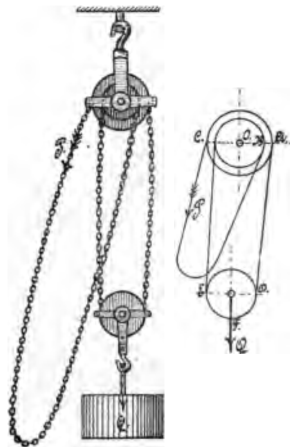


Fig. 157.

Die Gleichgewichtsbedingung ergiebt sich leicht, wenn man bedenkt, dass die obere Flasche als ein um die Achse O drehbarer Hebel betrachtet werden kann, an welchem drei Kräfte wirksam sind, nämlich in A und B gegenüber die gleichen Spannungen $\frac{Q}{2}$ und in C der Zug P_0. Da die erste den Hebelkörper rechts, die beiden letzten ihn aber links herum zu drehen suchen, so muss sein

$$\frac{Q}{2} R - \frac{Q}{2} r - P_0 R = 0$$

und hieraus folgt

$$\boldsymbol{P_0 = \frac{R - r}{2 R} Q. \quad . \; . \; . \; . \; . \; 1.}$$

Diese Formel sagt uns, dass P_0 im Verhältnis zu Q behufs Herstellung des Gleichgewichts um so kleiner zu sein braucht, je weniger sich R von r unterscheidet und je grösser R ist.

An die Stellen der Radien R und r können übrigens auch die Zähnezahlen Z und z beider Kettenscheiben gesetzt werden; denn ist b die Entfernung der Mittelpunkte zweier Nachbarzähne, so haben wir, weil in beiden Kettenrollen alle Zähne gleich weit von einander abstehen müssen,

$$2 R \pi = b Z, \; 2 r \pi = b z,$$

folglich

$$R = \frac{b Z}{2 \pi}, \; r = \frac{b z}{2 \pi}$$

und mit Einführung dieser letzten beiden Werte in die obige Formel für P_0 entsteht nach Abkürzung mit $\frac{b}{2 \pi}$:

$$\boldsymbol{P_0 = \frac{Z - z}{2 Z} Q. \quad . \; . \; . \; . \; . \; 2.}$$

In den vorstehenden beiden Formeln 1 und 2 ist natürlich wiederum die Zapfen- und Kettenreibung unbeachtet geblieben, sodass erstere zu kleine Werte liefern. Die wirkliche Hubkraft erhalten wir, abermals mit Benutzung der Beziehung $P_0 = P \eta$, nämlich

$$P = \frac{R - r}{2 R \eta} \cdot Q = \frac{Z - z}{2 Z \eta} \cdot Q, \quad \ldots\ldots \quad 3.$$

worin der Wirkungsgrad η folgende Näherungswerte besitzt:

für $\frac{r}{R} = \frac{z}{Z} =$	$\frac{7}{8}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{14}{15}$
ist $\eta =$	$0,51$	$0,41$	$0,35$.

Wir sehen, dass auch diese Hebevorrichtung einen recht geringen Gütegrad besitzt und dass letzterer noch dazu mit wachsendem Übersetzungsverhältnis zwischen Q und P ziemlich rasch abnimmt, sodass schon bei $\frac{r}{R} = \frac{z}{Z} = \frac{7}{8}$ die Grenze der Selbsthemmung ($0,5$) fast erreicht, dagegen bei $\frac{r}{R} = \frac{z}{Z} = \frac{11}{12}$ bereits weit überschritten ist.

Vorteile des Differentialflaschenzuges sind Leichtigkeit seines Transports, die Möglichkeit, ihn überall, wo nur ein Haken in genügender Höhe anzubringen ist, benutzen zu können, ferner beliebig grosse Hubhöhe bei genügender Kettenlänge und Einfachheit der Konstruktion. Als Nachteil muss aber ausser der schon erwähnten verhältnismässig niedrigen Nutzleistung die Empfindlichkeit gegen Überlastung genannt werden. Durch letztere können nämlich einzelne Glieder des gespannten Teiles der Kette gestreckt werden; sie passen dann nicht mehr in die Zähne der Rollen und es ist wenigstens die Kette unbrauchbar geworden.

§ 142.

Übungsbeispiele.

366. Ein Faktorenflaschenzug mit *8* Rollen wird durch ein *35 mm* starkes Hanfseil betrieben. Man soll den Wirkungsgrad und das der Wirklichkeit entsprechende Übersetzungsverhältnis zwischen Kraft und Last angeben.

Lösung: *35* steht gleich weit ab von *30* und *40*; folglich ist auf Grund der Tabelle in § 139 der fragliche Wirkungsgrad das arithmetische Mittel zwischen *0,68* und *0,60*, also *0,64*. Demnach ergiebt sich weiter

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{n \eta} \cdot = \frac{1}{8 \cdot 0,64} = \frac{1}{5,12} \cdot$$

367. Wie gestaltet sich das letztere Verhältnis bei Benutzung von trockenen, bzw. geschmierten Ketten?

Antwort: $\frac{1}{6{,}4}$, bzw. $\frac{1}{6{,}64}$.

368. Mittels eines aus *6* losen Rollen bestehenden und durch trockene Ketten getriebenen Potenzflaschenzuges soll eine Last von *2000 kg* gehoben werden. Welche effektive Kraft ist hierzu erforderlich?

Antwort: $P = \sim 39{,}5\ kg$.

369. Die beiden Durchmesser der Kettenrollen eines Differentialflaschenzuges sind *33* und *36 cm* lang; wie verhalten sich effektive Hubkraft und Last zu einander?

Antwort: Wie $1 : 9{,}84 = \sim 1 : 10$.

370. Die beiden Scheiben eines Differentialflaschenzuges haben *20* und *18* Zähne. Welche Kraft ist zur Hebung von *400 kg* erforderlich, den Gütegrad zu *0,46* angenommen?

Antwort: *43,5 kg.*

371. Wie muss allgemein das Verhältnis zwischen den beiden Kettenscheibenradien r und R $\left(\frac{r}{R} = \frac{z}{Z} = x\right)$ gewählt werden, damit man durch irgend eine Kraft einer n mal grösseren Last das Gleichgewicht halten kann, wenn alle schädlichen Widerstände unberücksichtigt bleiben?

Antwort: $x = \frac{n - 2}{n}$.

372. Für die beiden festen Rollen eines Differentialflaschenzuges die (geringsten) Zähnezahlen anzugeben, wenn sich ohne Reibung die Kraft zur Last wie $1 : 100$ verhalten soll.

Resultat: *49* und *50.*

373. Was ergiebt sich dagegen allgemein für x, sobald man die Ketten- und Zapfenreibung durch den Wirkungsgrad η berücksichtigt?

Antwort: $x = \frac{n - 2\eta}{n}$.

§ 143.

Schraube mit Schraubenrad.

Eine Schraubenspindel A (Fig. 158) kann vermittelst einer Kurbel von der Länge l um ihre (meist horizontal liegende) Achse $B\,C$ gedreht werden, ist aber (durch Zapfen- und Halslager) an der fortschreitenden Bewegung gehindert. Das Schraubengewinde A, dessen Ganghöhe g sei, greift genau in die schrägen Zähne eines Wellenrades mit den Halbmessern R und r.

Dieser Mechanismus heisst auch „Schnecken- oder Wurmgetriebe“ und, sobald die Welle des Schraubenrades zugleich als Lasttrommel dient, eine „Schneckenwinde“.

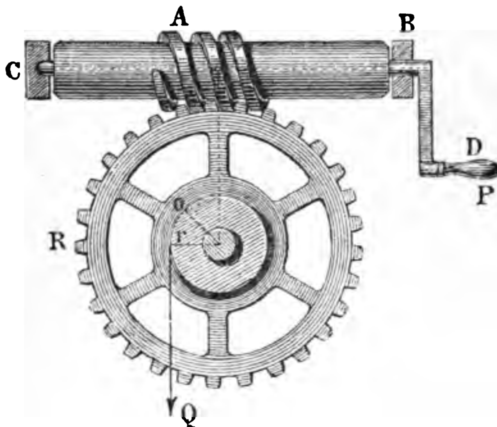


Fig. 158.

Bezeichnet nun P_0 jene ideelle Kraft am Hebelsarm l, welche die Last Q ohne passive Widerstände gleichförmig aufwärts zu bewegen imstande wäre und X den dabei stattfindenden Druck zwischen dem Schneckengewinde und den Zähnen des Schraubenrades, so ist einerseits nach § 102, Formel 2

$$2\,l\,\pi\,P_0 = g\,X$$

und andrerseits nach § 96, Formel 1

$$X\,R = Q\,r.$$

Durch Multiplikation beider Beziehungen folgt

$$2\,l\,\pi\,P_0\,X\,R = g\,X\,Q\,r$$

und hieraus die ideelle Hubkraft

$$P_0 = \frac{g\,r}{2\,l\,\pi\,R} \cdot Q. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1.$$

Von den Bewegungshindernissen spielt hier die gleitende Reibung am Schraubengewinde die Hauptrolle und der Gütegrad η_1 des Wurmgetriebes hängt wesentlich von der Steigung, bzw. vom Steigungswinkel α dieses Gewindes ab. Bezeichnet aber r_1 den mittleren Radius des letzteren, so bestimmt sich nach § 102 die Steigung der Schraubenlinie durch den Quotienten $\frac{g}{2\,r_1\,\pi}$ und wir haben nun in nachstehender Tabelle die Wirkungsgrade des Schneckengetriebes zwischen denjenigen Grenzen angegeben, zwischen welchen die Steigungswinkel der Schraubengewinde in der Praxis vorkommen; der Koëffizient der gleitenden Reibung wurde dabei zu *0,123* angenommen.

Verhältnis $g : 2\,r_1\,\pi =$	*0,05*	*0,10*	*0,15*	*0,20*	*0,25*	*0,30*	*0,40*	*0,50*
Steigungswinkel $\alpha =$	*2° 52'*	*5° 42'*	*8° 32'*	*11° 18'*	*14° 2'*	*16° 42'*	*21° 48'*	*26° 34'*
Wirkungsgrad $\eta_1 =$	*0,26*	*0,40*	*0,49*	*0,54*	*0,59*	*0,62*	*0,65*	*0,68*

Man sieht, dass der Wirkungsgrad η_1 eines Schneckentriebwerkes — wenigstens innerhalb des Tabellengebietes — mit zunehmender Steigung des Schraubengewindes erst sehr schnell, dann allmählig langsamer wächst und kann daraus die Lehre ziehen, dass Schneckengewinde mit zu kleinem Steigungswinkel ungünstig wirken, insofern sie den Nutzeffekt derjenigen Maschine, von welcher sie einen Teil bilden, enorm herabdrücken. Schnecken mit Steigungswinkeln bis zu *8° 32'* oder mit dem Steigungsverhältnis $g : 2\,r_1\,\pi$ bis zu *0,15* besitzen sogar noch Selbsthemmung, weil bis dahin der Wirkungsgrad kleiner als *0,5* ist.

Sollte sich aber gelegentlich für $\frac{g}{2\,r_1\,\pi}$ eine Zahl herausstellen, welche in obiger Tabelle fehlt, so kann man ja leicht (schon durch blosse Abschätzung) einen entsprechenden Zwischenwert wählen.

Wäre beispielsweise die Ganghöhe $g = 77\ mm$ und der mittlere Gewindehalbmesser $r_1 = 84\ mm$, so fände sich

$$\frac{g}{2\, r_1\, \pi} = \frac{77}{168\, \pi} = 0{,}1459 = \sim 0{,}146$$

und man könnte auf Grund unserer Tabelle den Wirkungsgrad des betreffenden Wurmgetriebes

$$\eta_1 = 0{,}48$$

setzen, woraus zu erkennen, dass von der Arbeit, welche die Kraft P an der Kurbel leistet nur *48* % auf die Lasttrommel übertragen, dagegen *52* % von der Reibung aufgezehrt werden.

Der bisher besprochene Wirkungsgrad η_1 bezieht sich lediglich auf das Wurmgetriebe, nicht mit auf die Lasttrommel. Bezeichnet man aber das Güteverhältnis der letzteren mit η_2, so ist nach § 135, Formel 2 der Gesamtwirkungsgrad der Schneckenwinde

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2, \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{2.}$$

wo nun nach § 129

$$\eta_2 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1{,}014 + 0{,}00125\, d}} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{3.}$$

ist, sobald die Last an einem d Millimeter starken Hanfseil hängt, während bei Kettenbetrieb

$$\eta_2 = \mathbf{0{,}97} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{4.}$$

gewählt wird.

Wenn also in obigem Spezialfall die Last Q mittelst eines *40 mm* starken Hanfseiles befördert werden soll, so ergiebt sich als Gütegrad der Trommel

$$\eta_2 = \frac{1}{1{,}014 + 0{,}05} = \frac{1}{1{,}064} = 0{,}94$$

und mithin ist der Gesamtwirkungsgrad der Schneckenwinde

$$\eta = \eta_1\, \eta_2 = 0{,}48 \cdot 0{,}94 = \sim 0{,}45,$$

während man bei Anwendung einer trockenen Kette

$$\eta = \eta_1\, \eta_2 = 0{,}48 \cdot 0{,}97 = \sim 0{,}47$$

bekäme.

Nach alledem ist

$$\boldsymbol{P = \frac{g\, r}{2\, l\, \pi\, R\, \eta} \cdot Q} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{5.}$$

diejenige effektive Kraft, durch welche an der Schneckenwinde vom Gütegrad η die Last Q aufwärts bewegt werden kann.

§ 144.

Übungsbeispiele.

374. Das Steigungsverhältnis und den Steigungswinkel jenes Schneckengewindes anzugeben, dessen Ganghöhe *89 mm* und dessen mittlerer Radius *75 mm* beträgt.

Resultate: $\frac{g}{2\,r_1\,\pi} = 0{,}1889 = \sim 0{,}19$ und $\alpha = 10^{\circ}\,42'$.

375. Wie hoch stellt sich der Gütegrad des zugehörigen Schneckengetriebes?

Antwort: $\eta_1 = 0{,}53$.

376. Welches ist der Gesamtwirkungsgrad der entsprechenden Schneckenwinde, als Zugorgan für die Last ein *44 mm* starkes Hanfseil vorausgesetzt?

Antwort: $\eta = 0{,}496$.

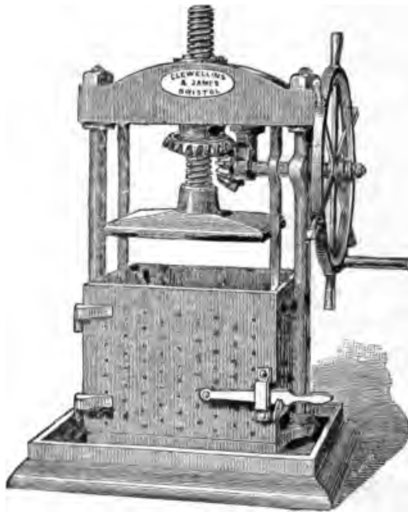


Fig. 159.

377. Wenn nun $r = 72$ *mm* (bis zur Seilmitte), $R = 457$ *mm* und $l = 400$ *mm* gegeben sind, so soll ermittelt werden, welche Last Q thatsächlich mit *25 kg* Hubkraft emporgewunden werden könnte.

Resultat: $Q = 2222{,}6\ kg$.

378. In der aus Figur 159 ersichtlichen Hopfenpresse sitzt an der Kurbelwelle ein konisches Zahnrad vom Halbmesser r und greift in ein eben solches vom Radius R, welches wiederum auf einer Schraubenmutter mit der Ganghöhe g befestigt ist. Es soll die allgemeine Gleichgewichtsbedingung zwischen dem von der Spindel ausgeübten Druck Q und der am Kurbelradius l wirksamen Kraft P abgeleitet und dabei auch die Reibung durch Einführung des Gesamtwirkungsgrades η berücksichtigt werden.

Resultat: $\boldsymbol{2\, l\, R\, \pi\, P\, \eta = r\, g\, Q}$.

379. Welcher Druck wird also durch drei Arbeiter, welche mit je *20 kg* auf die Kurbel, bzw. Radspeichen drücken, mittels dieser Presse ausgeübt werden können, wenn $l = 450$, $R = 225$, $r = 120$, $g = 25\ mm$ und $\eta = 0{,}4$ sind?

Antwort: $Q = 1620\,\pi = 5089{,}4\ kg$.

§ 145.

Schlussbetrachtungen.

Wir haben im vorstehenden die Gleichgewichtsbedingungen für einige zusammengesetzte Maschinen entwickelt — nicht etwa bloss um der Schlussresultate willen, sondern zunächst auch deswegen, um dem Anfänger zu zeigen, wie er durch einige Überlegung den Gleichgewichtszustand irgend einer zusammengesetzten Maschine auf die Beziehungen für das Gleichgewicht an einfachen Maschinen zurückführen kann: er braucht nur die erstere in ihre letzten Bestandteile zu zerlegen und die Kräfte an den Übertragungspunkten zu ermitteln. Von P oder Q ausgehend, erhält man mit Elimination der fortpflanzenden Zwischenkräfte leicht die gewünschte Gleichgewichtsbedingung zwischen P und Q.

Behufs Aufstellung der letzteren giebt es bei Nichtbeachtung der Nebenhindernisse (Reibung und Seilsteifigkeit) noch einen zweiten, zuweilen sogar wesentlich kürzeren Weg; denn unter Voraussetzung gleichförmiger Bewegung aller Maschinenteile müssen die beiden mechanischen Arbeiten, welche während einer bestimmten (sonst aber beliebig wählbaren) Zeit einerseits von der ideellen Kraft P_0 und andrerseits von dem auszuübenden Zug oder Druck Q geleistet werden, genau überein-

stimmen (vergl. §§ 41 und 104). Bezeichnen daher s und h diejenigen Wege, welche von den Angriffspunkten der Kraft P_0 und der Last, bzw. des Widerstandes Q in ihren eigenen Wirkungslinien und während der nämlichen Zeit t zurückgelegt wurden, so ist

$$P_0 \, s = Q \, h \quad \cdots\cdots \quad \mathbf{1.}$$

die allgemeine Form der Gleichgewichtsbedingung ohne Rücksicht auf die schädlichen Widerstände.

Lassen wir z. B. die Kurbel der in § 137 besprochenen Differentialwelle ein volles Mal gleichmässig umdrehen, so ist mit Beibehaltung der dortigen Bezeichnungen

$$s = 2 \, l \, \pi$$

ferner, weil sich gleichzeitig die Last Q um den halben Unterschied der beiden Trommelumfänge hebt,

$$h = \frac{2 \, R \, \pi - 2 \, r \, \pi}{2} = (R - r) \, \pi,$$

und wir erhalten mit Einsetzung dieser Werte in die allgemeine Gleichung 1

$$P_0 \cdot 2 \, l \, \pi = Q \cdot (R - r) \, \pi,$$

woraus sich die ideelle Kraft an der Differentialwelle

$$P_0 = \frac{R - r}{2 \, l} \cdot Q,$$

also wie früher ergiebt.

Aus Formel 1 folgt auch

$$\frac{P_0}{Q} = \frac{h}{s}$$

oder in Worten: Ohne Rücksicht auf die schädlichen Widerstände verhalten sich an jedem Hebezeug Kraft und Last umgekehrt wie die innerhalb einer bestimmten Zeit von ihren Angriffspunkten durchlaufenen Wege. Hiernach hat man sich schon beim Entwurf einer solchen Maschine zu richten, indem so zu disponieren ist, dass, je kleiner die Hubkraft im Verhältnis zu Q sein soll, der Kraftweg s dem Lastweg h gegenüber um so grösser ausfällt.

Allein in Wirklichkeit ist der Quotient aus Kraft und Last stets grösser als $\frac{h}{s}$, weil die effektive Hubkraft P ausser der

Nutzlast Q noch die schädlichen Widerstände der Reibung und Seilsteifigkeit zu überwinden hat.

Bedenkt man dieses, sowie zweitens, dass jede Maschine für um so wertvoller zu erachten ist, je weniger P von P_0 abweicht, dann sieht man auch ein, dass die Beziehung 1 einen Idealzustand darstellt, d. h. einen Zustand, welchen man zwar thatsächlich nie ganz erreichen kann, dem man sich aber immer so weit nähern sollte, als es die Umstände in jedem besonderen Falle erlauben.

Der letzteren Absicht wird entgegengekommen durch thunlichste Veringerung von $P - P_0$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch möglichste Herabsetzung der Gesamtsumme aller Nebenhindernisse, welche an der projektierten Maschine auftreten. Da aber der Wert jeder absoluten Summe um so kleiner ausfällt, erstens, je kleiner die Gliederzahl und zweitens, je kleiner die einzelnen Glieder selbst sind, so eröffnen sich auf diese Weise jene beiden massgebenden Gesichtspunkte, welche der Erreichung unseres Zieles Gewährleistung versprechen. Die erste der beiden Rücksichten können wir begünstigen durch möglichste Einfachheit der Maschine; denn aus je weniger Teilen die letztere besteht, desto mehr reduziert sich die Anzahl der Glieder, welche Wirkungsverluste verursachen.

In zweiter Linie müsste man dahin trachten, diejenigen Maschinenelemente zu vermeiden, welche besonders grosse schädliche Widerstände herbeiführen und an deren Stelle solche mechanische Potenzen treten lassen, die nur unbedeutende Nebenhindernisse im Gefolge haben, insbesondere dürften solche Maschinenorgane zu bevorzugen sein, bei welchen diese Hindernisse auf künstliche Art, z. B. durch Schmiermittel, event. noch weiter herabgedrückt werden können.

Um ein richtiges Urteil über die Stärke des Einflusses der verschiedenen passiven Widerstände unter den am häufigsten vorkommenden Umständen zu gewinnen, stützen wir uns vorderhand auf die Ergebnisse der drei letzten Kapitel. Da kann wohl der Widerstand der Zapfenreibung als derjenige hingestellt werden, welcher im allgemeinen den Nutzeffekt am wenigsten beeinträchtigt, nicht bloss, weil dies Bewegungshindernis meist an und für sich verhältnismässig gering ist, sondern auch, weil es

an einem kurzen Hebelsarm (dem Zapfenradius) wirkt und demnach sowohl ein kleines Moment hat als auch wenig Arbeit konsumiert. Bestätigt wird diese Angabe durch die Thatsache, dass alle maschinellen Vorrichtungen, an welchen nur die Zapfenreibung als schädlicher Widerstand auftritt, aussergewöhnlich hohe Wirkungsgrade besitzen.

Das ist auch der Grund, warum von allen Maschinen der nackte Hebel, an welchem Kraft und Last direkt, d. h. ohne Vermittelung irgend eines Zug- oder Druckorgans, angreifen, den höchsten Nutzeffekt liefert. Bezeichnen wir nämlich die Arme von P und Q mit a und b, sowie den Zapfenradius mit r und den Zapfenreibungskoëffizienten mit φ, so ist für den hier ungünstigsten Fall der Parallelität zwischen P und Q die Gleichgewichtsbedingung

$$Pa = Q\,b + \varphi\,(P + Q)\,r,$$

woraus die effektive Kraft

$$P = \frac{b + r\,\varphi}{a - r\,\varphi} \cdot Q$$

folgt. Da die ideelle Kraft

$$P_0 = \frac{b}{a} \cdot Q$$

ist, so erhalten wir für den Wirkungsgrad des Hebels die allgemeine Formel

$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a - r\,\varphi}{b + r\,\varphi},$$

woraus sich z. B. für die gewöhnlichen Spezialwerte $a = 800\,mm$, $b = 400\,mm$, $r = 25\,mm$ und $\varphi = 0{,}08$

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot \frac{798}{402} = \frac{399}{402} = \mathbf{0{,}9925}$$

ergiebt. Wie dem aufmerksamen Leser nicht entgangen sein wird, ist vorstehend der zweiarmige Hebel vorausgesetzt. Noch vorteilhafter wirkt aber der einarmige Hebel; denn für diesen ist der Zapfendruck nicht $P + Q$, sondern $Q - P$, mithin

$$P\,a = Q\,b + (Q - P)\,r\,\varphi,$$

$$P = \frac{b + r\,\varphi}{a + r\,\varphi} \cdot Q$$

demnach der Gütegrad allgemein

$$\eta = \frac{b}{a} \cdot \frac{a + r\,\varphi}{b + r\,\varphi}$$

und wir erhalten mit Einsetzung obiger Zahlenangaben

$$\eta = \frac{401}{402} = \mathbf{0{,}9975}.$$

Schon etwas höher als die Einwirkung der Zapfenreibung muss im allgemeinen der Einfluss der Zahnreibung auf die Wirkungsverluste veranschlagt werden; denn der Wirkungsgrad eines Zahnrädervorgeleges schwankt zwischen *0,93* und *0,99*, wenn man ihn nur auf die Zapfenreibung bezieht, dagegen zwischen *0,85* und *0,98*, sobald man lediglich die Zahnreibung berücksichtigt.

Was ferner die Kettenreibung und Seilsteifigkeit anbelangt, so lässt sich eine derartige, wenn auch nur schätzungsweise Vergleichung kaum anstellen, weil der Einfluss dieser Bewegungswiderstände nicht blos von der Stärke und Beschaffenheit der Zugorgane, sondern hauptsächlich auch vom Halbmesser der Rolle, der Welle oder des Rades abhängt, auf welche sie gewickelt sind und weil dieser Halbmesser innerhalb weitester Grenzen liegt. Ausserdem kommt es sehr darauf an, ob nur ein beanspruchtes Trum sich auf-, resp. abwickelt oder ob deren mehrere vorhanden sind.

Diese allgemeinen Ausführungen werden erläutert und zugleich die darin enthaltenen Behauptungen bestätigt durch die in § 129 besprochene und mittels Figur 143 veranschaulichte Speicherwinde auf der einen, sowie durch die in § 137 und Figur 153 kennen gelernte Differentialwinde auf der andern Seite; denn obgleich beide Hebezeuge mit Seilbetrieb gedacht waren und an beiden die Zapfenreibung gar nicht oder doch nur unbeträchtlich verschieden sein kann, so erhielten wir selbst unter Zugrundelegung ganz normaler Abmessungen für die erstere den Gütegrad

$$\eta = 0{,}956$$

und für die letztere

$$\eta = 0{,}489.$$

Der enorme Abstand dieser Werte lässt sich eben nur dadurch erklären, dass bei der Differentialwelle jedes der beiden beanspruchten Seilstücke a und b sowohl auf- als abläuft, dass also der Seilbiegungswiderstand vier mal zur Geltung kommt und ausserdem, was ja nicht unterschätzt werden darf, an kurzen Hebelsarmen wirkt, während bei der Speicherwinde die Kettenreibung, bzw. Seilsteifheit nur je einmal und letztere noch dazu an verhältnismässig sehr langem Hebelsarm auftritt.

Ein ähnlicher Gegensatz, welcher den nämlichen Ursachen zuzuschreiben ist, besteht zwischen dem Schnellflaschenzug im Beispiel 346 (Fig. 144) mit dem Wirkungsgrad *0,95* und dem Differentialflaschenzug in § 141 (Fig. 157) mit den Gütegraden von *0,51* bis herunter zu *0,35*.

Wenn es demnach der Raum gestattet und nicht andere gewichtigere Rücksichten dagegen sprechen, so sollte man bei derartigen Maschinen ein vorgeschriebenes Verhältnis von Kraft zur Last weniger durch Zwischengetriebe als durch ein entsprechend grosses Ziehrad zu erreichen suchen, weil man ersteren Falls unnötig grosse Wirkungsverluste mit in den Kauf nehmen müsste.

Endlich wird das bedeutendste Bewegungshindernis zweifellos vertreten durch die gewöhnliche gleitende Reibung auf der Ebene, am Keil und an der Schraube, wie schon das Schneckengetriebe zeigt, dessen Wirkungsgrad nach § 143 höchstens *0,68* ist und bis auf *0,26* herabgehen kann. Hier haben wir diesen Widerstand blos oberflächlich gestreift und zwar auch nur deshalb, um eine gewisse Vollständigkeit und Abrundung zu erzielen. Weil aber die genaue Berücksichtigung der gleitenden Reibung weitergehende mathematische Hilfsmittel erfordert, als vorläufig benutzt werden sollen, so musste die Behandlung dieses Gegenstandes in den zweiten Teil dieses Werkes verwiesen werden.

Nach alledem lässt sich freilich nicht wohl eine Rangliste aufstellen, in welcher die verschiedenen Widerstandsarten streng nach der Stärke ihres Einflusses auf die bewegende Kraft P geordnet wären; denn diese Widerstände sind nicht bloss an und für sich bald von höherem, bald von geringerem Werte, sondern es kommt auch noch ausserdem darauf an, ob sie an längeren oder kürzeren Hebelsarmen wirken, weil sie dann grössere oder kleinere Momente haben und folglich P mehr oder minder beeinflussen. Deshalb müssen eben derartige Bewegungshindernisse berechnet werden. Wenn man letzteres in zahlreichen Fällen und unter den gewöhnlich vorkommenden Bedingungen ausgeführt hat, auch imstande ist, die Resultate zu behalten, so gewinnt man nach und nach die Fähigkeit, die Einwirkung der in Frage stehenden Nebenhindernisse ohne vorherige Rechnung ziemlich genau abzuschätzen, eine Fähigkeit, die dann unter den Namen „praktisches Gefühl" rubriziert zu werden pflegt.

Allerdings wäre schliesslich noch zu bedenken, dass im praktischen Leben die Erreichung des vorgeschriebenen Übersetzungsverhältnisses und die Fürsorge für einen hohen Wirkungsgrad manchmal noch nicht genügen, sondern das zuweilen

weitere Anforderungen gestellt werden oder andere Rücksichten zu nehmen sind. Hierbei kommt es nun nicht selten vor, dass von zwei Übeln das eine gewählt werden muss und da man aus Nützlichkeitsgründen offenbar das kleinere bestimmen will, so ist es nötig, beide ihrer Grösse nach zu kennen und infolgedessen vorher zu berechnen.

Aber auch hier kann sich der Techniker durch genügend häufige Anwendung des eben genannten Mittels in den Rechnungsergebnissen einen Erfahrungsschatz ansammeln und auf Grund desselben nach und nach denjenigen sicheren Blick gewinnen, welcher ihm in jedem einzelnen Falle (selbst ohne vorherige Rechnung) ein richtiges Urteil über die vorteilhafteste Anordnung verschafft.



Urteile der Presse über die früheren Auflagen vorliegenden Werkes.

Zeitschrift für Mathematik und Physik von Dr. O. Schlömilch etc., XXXV, 4:

Dass Verfasser unter den zahlreichen Lehrbüchern der Mechanik keines finden konnte, welches den Anforderungen einer Werkmeisterschule vollkommen gerecht wird, ist leicht begreiflich; denn derartige Verhältnisse sind den meisten anderen Schulen durchaus fremd. Die vorliegende Mechanik macht ganz den Eindruck, als ob Verfasser das Richtige getroffen hat, da sich den kurzen Erläuterungen unmittelbar stets eine Reihe von Beispielen anschliessen, die vielfach der Praxis entnommen sind und deren Lösung sofort beigedruckt ist. Gewiss wird dieses Buch bei den betreffenden Schülern beliebt sein. Von des Verfassers Standpunkt aus ist wohl der Titel „Theoretische Mechanik" ganz berechtigt, indessen wäre das Wort „theoretisch" besser weggeblieben, da man unter „theoretischer Mechanik" doch etwas Anderes versteht, wenn dieses Buch mit anderen Lehrbüchern der Mechanik verglichen wird. . . .

Die nötigen Figuren enthalten zwei dem Buche beigefügte Tafeln.

B. NEBEL.

Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, XXXIV, No. 14:

Dem Vorworte nach ist die Schrift für Werkmeisterschulen bestimmt, also zur Ausbildung von Schmieden, Schlossern, Mechanikern und dergleichen, die nach längerer praktischer Arbeit, etwa im Alter von 20 bis 30 Jahren sich dazu entschliessen, auf einer solchen Anstalt sich die nötigen theoretischen Kenntnisse zu erwerben.

Das Buch giebt zunächst die Anfangsgründe der Bewegungslehre, die Begriffe von Beharrung, Kraft, mechanischer Arbeit, Krafteffekt, Wirkungsgrad der Maschinen, Masse, Arbeitsfähigkeit (lebendige Kraft), und geht erst dann zur graphischen Darstellung der Kräfte in der gebräuchlichen Weise über. Darauf folgt die Lehre vom Schwerpunkte, von den einfachen und zusammengesetzten Maschinen, zum Schlusse das Kapitel von der Reibung.

Ausgeschlossen ist die Lehre vom Stoss, von der Centrifugalkraft, von den Trägheitsmomenten, die Festigkeitslehre, die Hydromechanik und Aëromechanik.

Der Verfasser wird nach seinen Unterrichtserfahrungen Grund zu dieser Beschränkung des Stoffes gehabt haben, und wer dem Satze von

Diesterweg beistimmt, dass die erste Weisheit der Pädagogik in der Beschränkung des Lehrstoffes liege, der wird auch mit jenen Ausschliessungen einverstanden sein.

Das ganze Buch ist so recht auf den Standpunkt des Werkmeisters zugeschnitten und für die entsprechenden niederen Fachschulen nach Auswahl des Stoffes und Klarheit der Darstellung wohl zu empfehlen. Auch die Reihenfolge ist im ganzen eine zweckmässige und dem Umstande angepasste, dass der Schüler in der Regel gleichzeitig mit der Mathematik und der Mechanik beginnen muss, sodass im Anfange Schwierigkeiten mathematischer Art zu vermeiden sind.

Der Verfasser wählt für das unpassende Wort Pferdekraft mit Recht den Ausdruck Pferdestärke, denn es handelt sich dabei nicht um Kraft, die etwa in kg zu messen ist, sondern um eine in der Zeiteinheit zu leistende Arbeit, also um eine Anzahl von Meterkilogrammen. . . .

Hagen i. W., den 2. März 1890. Dr. G. HOLZMÜLLER.

Der praktische Maschinen-Constrakteur, XXIII, No. 20:

Die Behandlung des schwierigen Gebietes der theoretischen Mechanik mit elementarsten Hilfsmitteln der Mathematik ist von verschiedenen Seiten mit mehr oder weniger Glück versucht worden; es kommt auf den jeweiligen Standpunkt an, welchen die Verfasser derartiger, man kann sagen, volkstümlicher Lehrbücher der Mechanik ihren Lesern gegenüber einnehmen. In dem vorliegenden 200 Oktavseiten starken Werke hat der Verfasser sich der dankenswerten Aufgabe unterzogen, die Anfangsgründe der für jeden Techniker, mag er eine Stellung einnehmen, welche er wolle, durchaus unentbehrlichen Wissenschaft der Mechanik für einen Leserkreis zu bearbeiten, bei welchem die Kenntnis nur der einfachsten mathematischen Vorgänge vorausgesetzt werden kann. Die Aufgabe ist entschieden mit Glück gelöst worden, denn die einzelnen Abschnitte sind nicht nur, soweit es die einfache Behandlungsweise zulässt, in ausgiebigster Weise bedacht, sondern die ausserordentlich klare Schreibweise erleichtert das Verständnis für deren Inhalt ungemein. Die vielen mit Geschick gewählten Übungsaufgaben mit beigefügten Rechnungsergebnissen ergänzen den an sich reichen Inhalt des Buches in vorteilhafter Weise. C. F. R.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, XXI, 2, pag. 848:

Der auf dem Gebiete des technischen Unterrichts mit vielem Erfolge thätige Verfasser hat sein Buch „mit den einfachsten mathematischen Hilfsmitteln für technische Fachschulen, Werkmeisterschulen und zum Selbstudium bearbeitet“; er hat den einzelnen Abschnitten des Leitfadens eine solche Reihenfolge gegeben, dass der Unterricht mit dem jeweiligen mathematischen Wissen und Können des Schülers im Einklange steht, und hat eine grosse Anzahl passender numerischer Aufgaben zur Erläuterung gebildet. Für den beschränkten Zweck erscheint die Schrift sehr gut geeignet. Lp.

Druck von Moritz Billig in Mittweida.





